

ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра медицинской биофизики и информационных технологий	044 -35/11 (М) ()	
Лекционный комплекс по дисциплине «Математика - часть 1»	Стр. 1 из 40	

ЛЕКЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС

Дисциплина: Математика – часть 1

Код дисциплины: Mat 1201-1

Специальность: 6B07201 - «Технология фармацевтического производства»

Объем учебных часов (кредитов): 150/5

Курс и семестр изучения: 1,1

Объем лекции: 10 (часов)

2023-2024 учебный год

Лекционный комплекс разработан в соответствии с ОП «Технология фармацевтического производства» и обсужден на заседании кафедры

Протокол № 12 «26» 05 2023.

Зав.кафедрой. к.ф-м.н., асс.проф. _____

Иванова М.Б.

Лекция №1

1. Тема: Определители второго порядка и их свойства

2. Цель: Объяснить студентам теорию определителей второго порядка и их свойства.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Введение в понятие определителя.

2. Свойства определителя.

В фармацевтической практике часто приходится иметь дело с неизвестными величинами, связанными между собой некоторыми заранее определенными зависимостями, которые могут быть выражены любыми формулами.

Если при этом выполняется ряд условий:

1) коэффициенты в формулах постоянные;

2) неизвестные входят в формулы только в первой степени;

3) отсутствуют произведения между самими неизвестными, тогда такие зависимости называют линейными.

Пример.

В лаборатории 10 образцов лекарственных форм, имеющие общий вес 280 г. Найти средний вес одного образца, если тара весит 15 г.

Чтобы найти средний вес образца, нужно составить уравнение: $10x+15=280$, обозначив за «х»-средний вес одного образца.

Решением составленного уравнения будет 26,5 г.

Пример.

В лаборатории 10 образцов, поступивших из 1 отдела, и 10 образцов, поступивших из 2-го отдела, которые имеют общий вес 280 г, а 5 образцов из первого набора и 2 образца из второго набора имеют общий вес 128 г. Найти средний вес образцов в каждом наборе.

Чтобы найти средний вес образца нужно составить два уравнения.

Обозначив за «х»- средний вес 1-образца, а за «у»- средний вес 2-образца, имеем:

$$10x+10y=280;$$

$$5x+2y=128,$$

решая которые совместно, получаем $x=24$ г; $y=4$

В обоих рассмотренных примерах получили линейные зависимости:

в первом случае – линейное уравнение,

во втором – система линейных уравнений.

Заменим коэффициенты буквами и получим линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 , b_2 , - некоторые числа, x , y - неизвестные.

Составим из коэффициентов системы прямоугольную таблицу вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1. Любую такую прямоугольную таблицу, составленную из чисел называют матрицей.

2. Элементы a_{ij} из которых составлена матрица, называют элементами данной матрицы.

3. Определителем второго порядка или детерминантом, соответствующих матриц называется число D : $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Определитель обозначается буквами D или Δ и записывается:

$$D = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3; \\ 8x - y = 6. \end{cases}$$

Пример. Дана система уравнений:

Составить матрицу системы и вычислить определитель.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Из коэффициентов системы составим матрицу и соответствующий ей

детерминант: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}.$

Выполним вычисления: $\Delta = (-1) \times 2 - (4 \times 8) = -2 - 32 = -34.$

Количество строк (или столбцов) в определителе называется порядком определителя.

Свойства определителя:

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами и наоборот.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

Заменяем строки столбцами и снова вычислим получившийся определитель.

$$D^* = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

Операция замены строк столбцами (или наоборот) в определителе называется транспонированием.

2. При перестановке двух строк или столбцов определитель меняет свой знак.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

Поменяем в нем местами столбцы и вычислим получившийся определитель.

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - b_1a_2).$$

Поменяем теперь местами строки и вновь убедимся в справедливости данного

$$D = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

свойства.

3. Если все элементы какого-либо столбца (или строки) матрицы умножить (или разделить) на одно и то же число m , отличное от нуля, то определитель также умножится (разделится) на это число.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \dots \dots D_1 = \begin{vmatrix} ma_1 & b_1 \\ ma_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = mD.$$

4. Определитель, у которого элементы одной строки (столбца) пропорциональны другой строке (столбцу), равен нулю.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & ra_1 \\ a_2 & ra_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ra_1 & rb_1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) можно представить как сумму двух слагаемых, то определитель будет равен сумме двух определителей. У первого из слагаемых определителей элементами соответствующей строки (столбца) будет первое слагаемое, а у второго - второе. Остальные элементы этих определителей будут такие же, как у исходного.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_1 b_3 - b_1 a_3) + (a_2 b_3 - b_2 a_3) = \\ = (a_1 + a_2) b_3 - (b_1 + b_2) a_3.$$

6. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца(строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), предварительно умноженные на какое-либо отличное от нуля число.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 m & b_1 \\ a_2 + b_2 m & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основная:**

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

- **Дополнительная:**

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.

2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.

3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• **Электронные издания:**

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>

2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - б-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>

3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/

4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/

5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>

6. **Контрольные вопросы** (обратной связи):

1. Какая таблица называется матрицей?

2. Чем отличается определитель от матрицы?

Лекция №2

1. **Тема:** Матрицы и операции над ними

2. **Цель:** Объяснить студентам нахождение матрицы и операции над ними.

3. **Тезисы лекции:**

План лекции:

1. Матрицы и их виды.

2. Определение ранга матрицы.

3. Операции над матрицами.

Матрицей «А» называется любая прямоугольная таблица, составленная из чисел a_{ij} , которые называют элементами матрицы и обозначается:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij}).$$

Матрица, это любая прямоугольная таблица, составленная из *однородных* элементов.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Виды матриц:

1. Матрица - строка(или строковая матрица), состоящая из одной строки. Это прямоугольная матрица размером $1 \times n$. $A = a_{11}a_{12}\dots a_n$

2. Матрица – столбец (столбцевая матрица), состоящая только из одного

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

столбца. Это также прямоугольная матрица размером $m \times 1$

3. Матрица, состоящая из одного элемента. $A = (a_{11})1^*1 = a_{11}$

4. Нулевая матрица, состоящая из одних нулей, в матричной алгебре играет роль «0», обозначается «V».

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Единичная матрица, состоящая из нулей, кроме главной диагонали, на которой стоят единицы. Обозначается «E» и играет роль единицы в матричной алгебре.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Диагональная матрица, квадратная порядка «n», состоящая из нулей и на главной диагонали стоят не равные нулю элементы (не обязательно единицы).

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Важнейшей характеристикой *квадратной* матрицы является ее определитель или детерминант, который составляется из элементов матрицы и обозначается:

$$D_A = |A| = \det A = \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right|$$

7. Если $\det A \neq 0$ то матрица A называется невырожденной или не особенной. Если $\det A = 0$ то матрица A называется вырожденной или особенной.

9. Две матрицы «A» и «B» называются равными и пишут «A = B», если они

имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow A = (a_{ij})_{m \times n}; B = (b_{ij})_{m \times n} \forall i, j : a_{ij} = b_{ij}.$$

Определение ранга матрицы:

Рассмотрим прямоугольную матрицу. Если в этой матрице выделить произвольно «*n*» строк и «*m*» столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу *k*-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором *k*-го порядка матрицы «*A*». Матрица «*A*» обладает минорами любого порядка от «1» до наименьшего из чисел «*m*» и «*n*». Среди всех отличных от нуля миноров матрицы «*A*» найдется по крайней мере один минор, порядок которого будет наибольшим.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы.

Из определения ранга матрицы вытекает, что ранг любой прямоугольной матрицы не должен быть больше, чем минимальный размер матрицы.

Если матрица квадратная, то ранг не может быть больше, чем размер матрицы.

Если все элементы матрицы «*A*» равны нулю,

т. е. $a_{ij}=0$, то ранг этой матрицы тоже будет равен нулю $r = RgA = 0$.

Понятие ранга матрицы играет очень важную роль при построении графиков, при нахождении решения системы линейных уравнений, при переходе от одного базиса к другому, а также широко используется в прикладных исследованиях, особенно при обработке результатов эксперимента, количественного определения качества предоставленной для изучения информации.

Всякий детерминант минора матриц «*A*», отличный от нуля, размер которого равен рангу этой матрицы, называется базисным минором. т.е. иными словами ранг матрицы «*A*» это наивысший отличный от нуля минор.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти ранг матрицы:

Решение. Так как в этой матрице только в одной строке есть отличные от нуля члены, то $RgA=1$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти ранг матрицы:

Решение. Для проверки найдем детерминант этой матрицы: $\det A=7$. Он отличен от нуля, поэтому ранг матрицы равен 3, т.е. в матрице нет пропорциональных строк или столбцов.

Операции над матрицами:

Суммой двух матриц одинакового размера $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (C_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$ или $C = A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти $A + B$, если

Решение.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие:

$$A + B = B + A; \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

2. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число « k » называется такая матрица $C=(c_{ij})$, у которой $(c_{ij}) = (ka_{ij})$.

Следствие: Для операции произведение матрицы на число справедливы следующие соотношения:

$$1. kA = Ak$$

$$2. k(A+B) = Ak + Bk$$

$$(k + \lambda)A = Ak + A\lambda$$

$$k(\lambda A) = \lambda kA = \lambda(kA)$$

3. Матрица « B », у которой все элементы равны элементам матрицы « A » по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки по сравнению со знаками соответствующих элементов матрицы « A », называется противоположной матрице « A » и записывается: $B=(-1)(a_{ij})$.

Следствие: умножение любой матрицы на нулевую дает в результате нулевую матрицу: $0xA = 0$

Если A - квадратная матрица, то тогда также очевидно равенство

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \text{ где } n\text{- размер матрицы } A.$$

4. Если матрицы $A=(a_{ij})_{m \times p}$ и $B=(b_{ij})_{p \times n}$, то произведением матрицы « A » на матрицу « B » назовем матрицу « C », каждый элемент которой вычисляются по формуле:

$$C = AB = (a_{ij})_{m \times p} (b_{ij})_{p \times n} = (a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \dots + a_{1p}b_{pk})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$$

5. Если $AB = BA$, то такие матрицы « A » и « B » называют перестановочными или коммутативными.

6. Если в некоторой матрице « A » поменять местами столбцы и строки, то полученная матрица будет называться транспонированной и обозначается « A^T ».

7. Если выполняется равенство $A = A^T$, то такая матрица называется симметрической.

8. Обратной по отношению к матрице « A » называется такая матрица, для которой выполняется равенство $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

9. Матрица, которая имеет обратную называется обратимой или не особенной.

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SKMA -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра медицинской биофизики и информационных технологий		044 -35/11 (М) ()
Лекционный комплекс по дисциплине «Математика - часть 1»		Стр. 10 из 40

• **Основная:**

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• **Дополнительная:**

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомоллов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• **Электронные издания:**

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>
2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - 6-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>
3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>
ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. **Контрольные вопросы** (обратной связи):

1. Что называется матрицей?
2. Какие виды матрицы знаете?

Лекция №3

1. Тема: Система линейных алгебраических уравнений

2. Цель: Объяснить студентам теорию системы линейных алгебраических уравнений.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Основные определения систем линейных уравнений.

2. Решения систем линейных уравнений.

3. Виды систем линейных уравнений

Линейная система, составленная из «k» линейных уравнений относительно «n» неизвестных примет вид:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \right\}$$

где x_1, x_2, \dots, x_n - неизвестные; $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kn}$ - коэффициенты при неизвестных; b_1, b_2, \dots, b_k - свободные члены.

Решением системы таких уравнений называется совокупность из «n» чисел (c_1, c_2, \dots, c_n), которые подставлены в систему на место неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n , обращают все уравнения системы в истинные равенства.

Примечание:

Не всякая система имеет решение. Поэтому, прежде чем начать решать составленную систему, необходимо выяснить, есть ли вообще решение.

2. Систему уравнений, имеющую хотя бы одно решение, называют совместной, а систему, не имеющую решений называют несовместной.

3. Решения $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)})$ и $(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_n^{(2)})$ считают различными, если хотя бы одно из чисел $c_i^{(1)}$ не совпадает с соответствующим числом $c_i^{(2)}$.

Например, система
$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 8x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

имеет различные решения $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = 0$ и $c_1^{(2)} = 4; c_2^{(2)} = -3$. Системы, имеющие хотя бы 2 различных решения, имеют бесконечное количество разных решений.

4. Если совместная система имеет единственное решение, то она называется определенной.

5. Если совместная система имеет по крайней мере два различных решения, то она называется неопределенной.

Решение системы линейных уравнений:

Чтобы выяснить имеет ли составленная система решение или нет, а, если имеет решение, то их количество, применяют:

1. Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то такая система совместна и имеет хотя бы одно не нулевое решение.

Пример. Определить совместность системы
$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

Решение. Составим матрицу системы
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

и определим ее ранг т.е. число независимых строк или столбцов:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{rang} (3 \ 4) = 1$$

Составим расширенную матрицу системы $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 12 \end{pmatrix}$ и определим ее ранг (т.е.

число независимых строк или столбцов: $\text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 12 \end{pmatrix} = 2$

Как видим, ранг обычной матрицы не равен рангу расширенной, следовательно система несовместна, т.е. не имеет ни одно решения.

2. Если система имеет единственное нулевое решение, то такая система называется вырожденной.

3. Если система имеет количество уравнений меньше, чем количество неизвестных, то такая система называется недоопределенной, а если количество уравнений больше, чем количество неизвестных, то – переопределенной.

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

• **Основная:**

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• **Дополнительная:**

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• **Электронные издания:**

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>
2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - 6-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>
3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/

5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б.

https://elibrary.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>, ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. **Контрольные вопросы (обратной связи):**

1. Какие уравнения называются линейными?
2. Когда система имеет хотя бы одно нулевое решение?

Лекция №4

1. **Тема:** Кривые второго порядка.

2. **Цель:** Дать студентам понятие функции.

3. **Тезисы лекции:**

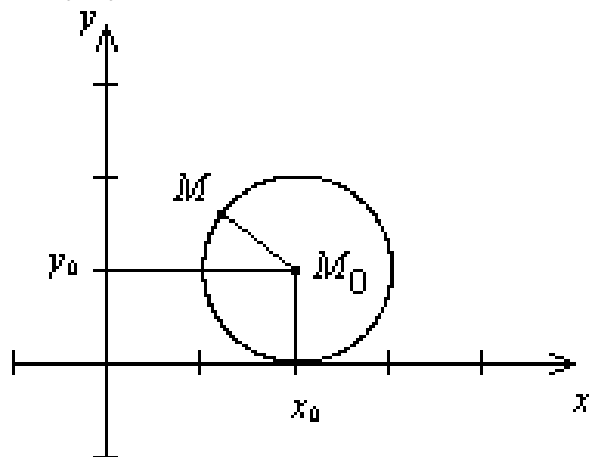
План лекции:

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола

К кривым второго порядка относятся кривые под названием окружность, эллипс, гипербола, парабола.

1. Окружность

Геометрическое положение точек, лежащих на одинаковом расстоянии от $C(x_0; y_0)$ данной точки, называется **окружностью**.

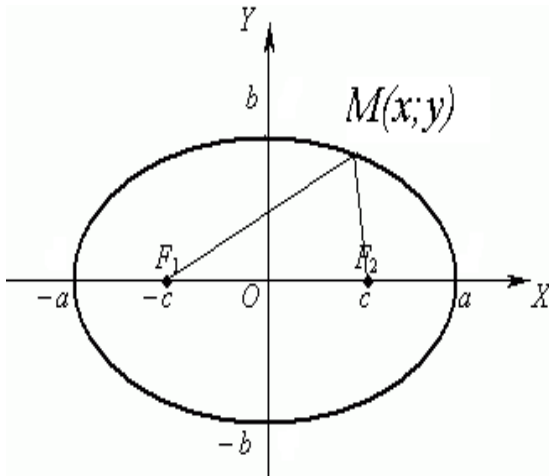


Точка $C(x_0; y_0)$ называется **центром окружности**, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, называется **радиусом** и обозначаем R .

Обозначим любую из точек $M(x; y)$ окружности, где уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ (1) будет уравнением окружности.

2. Эллипс

Геометрическое положение точек плоскости, в которых сумма расстояний от заданных двух точек, называемых **фокусами**, равна постоянному числу, называется **ЭЛЛИПСОМ**.



Используя формулу, определяющую расстояние между двумя точками:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

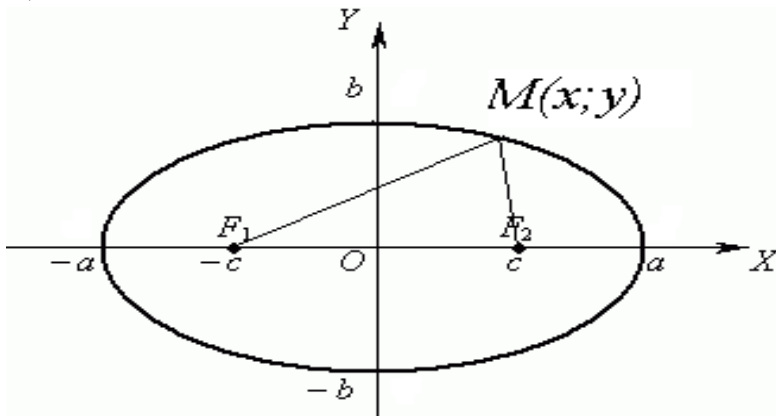
$a > c$, $a^2 - c^2 = b^2$ тогда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2) \quad \text{каноническое уравнение}$$

эллипса. Числа a и b называются большими и малыми полуосями эллипса.

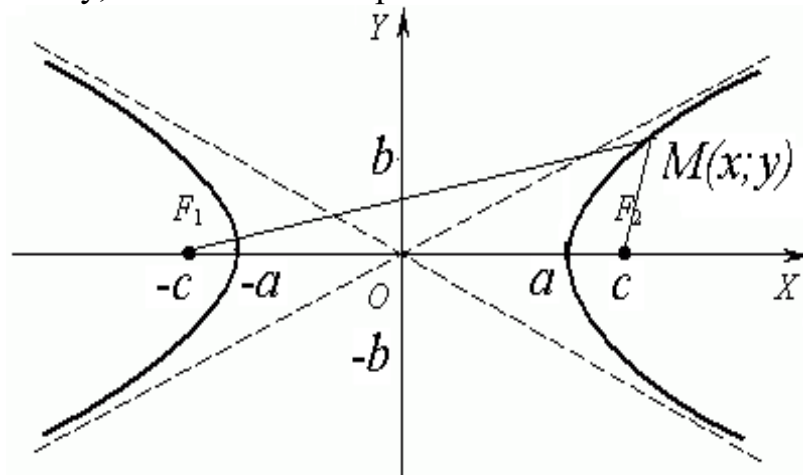
$\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса.

Для эллипса $\varepsilon < 1$. Если $b = a$, тогда $\varepsilon = 0$, эллипс становится окружностью.
 $r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ фокальные радиусные векторы эллипса.



Гипербола

Геометрическое место своих точек на плоскости, называемое фокусом, где разность расстояний между двумя заданными точками равна постоянному числу, называется гиперболой.



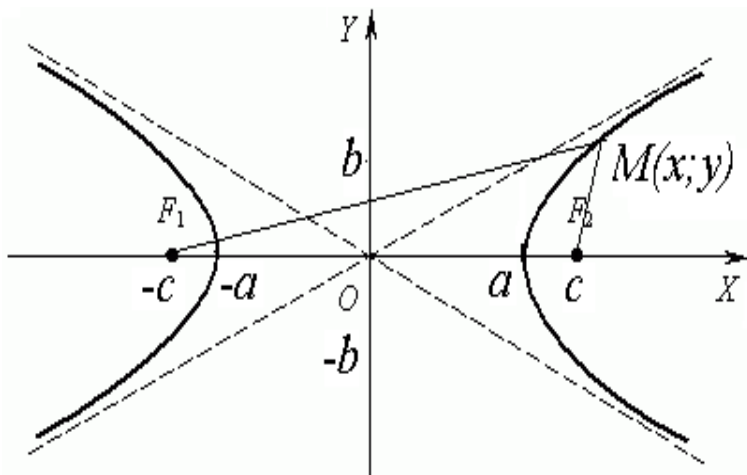
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$c > a$ и $c^2 - a^2 = b^2$, тогда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

каноническое уравнение
гиперболы



где a - действительная полуось гипербола; b - мнимая полуось гипербола,

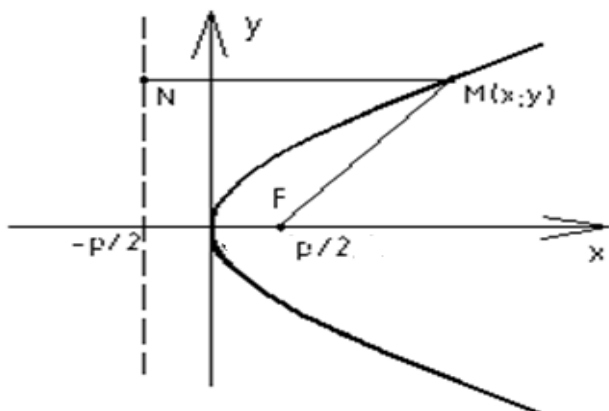
$\varepsilon > 1$

$y = \pm \frac{b}{a}x$ уравнения определяет

асимптоты гипербола.

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки F и заданной прямой d , не проходящей через заданную точку.



$$MF = MN \quad MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$BM = x + \frac{p}{2} \quad \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

$y^2 = 2px$ (4) называется каноническое уравнение параболы

$x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы параболы

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

• **Основная:**

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.]- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• **Дополнительная:**

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомоллов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра медицинской биофизики и информационных технологий	044 -35/11 (М) ()
Лекционный комплекс по дисциплине «Математика - часть 1»	Стр. 16 из 40

• **Электронные издания:**

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>
2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - 6-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>
3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>, ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. Что такое окружность?
2. Что такое эллипс?
3. Что такое гипербола?
4. Что такое парабола?

Лекция №5

1. Тема: Функция. Способы задания и свойства функций.

2. Цель: Дать студентам понятие функции.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Понятие функции.
2. Способы задания функции.
3. Предел функции
4. Бесконечно мало функций.
5. Свойства бесконечно малой функции.
6. Основные теоремы о пределе.

Соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу первого множества «X» по определенному закону или правилу соответствует не более одного элемента второго множества «Y», называется функцией.

Функция обозначается символом «f» и пишут $y = f(x)$ (читается «игрек равно эф от икс»). Используются и другие обозначения функции: $y = g(x)$, $y = F(x)$ и т. д., где «x» называют аргументом или независимой переменной.

В практических задачах область определения функции выясняется исходя из

физического смысла этой функции. Например, зависимость давления идеального газа от температуры выражается формулой $p = p_0(1+t/273)$, т. е. давление « p » можно рассматривать как функцию температуры « t ». Областью определения этой функции является интервал $]-273^\circ, +\infty[$, так как по физическому смыслу давление может принимать только положительные значения.

Способы задания функции

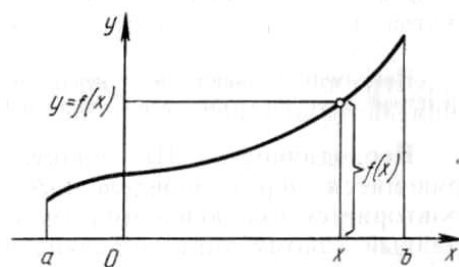
1. Аналитический способ - это задание функции с помощью формул. Например, $y = x^2 + 1$ или $f(x) = x^2 + 1$. Если уравнение, с помощью которого задается функция, не разрешено относительно « y » т. е. задан виде уравнение $y - x^2 - 1 = 0$, то функцию называют неявной. Неявную функцию необходимо привести к явной форме, т. е. к виду $y = x^2 + 1$.

2. Табличный способ — это задание функции с помощью таблицы. Табличный способ задания функции широко используется в экспериментах и наблюдениях.

Например, измеряя температуру тела больного через определенные промежутки времени, можно составить таблицу значений температуры тела.

t , ч	9	10	11	12
tT , °C	37,0	37,3	37,8	39,0

3. Геометрический способ — это задание функции в виде графика. График функции представляет собой множество точек вида $(x; y)$ на координатной плоскости xOy , координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Само равенство $y = f(x)$ называется уравнением этого графика.



Теория пределов позволяет определить характер поведения функции $y = f(x)$ при заданном изменении аргумента. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, за исключением, быть может, самой точки x_0 .

Число « A » называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число « δ », что для любого $x \neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется соотношение

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

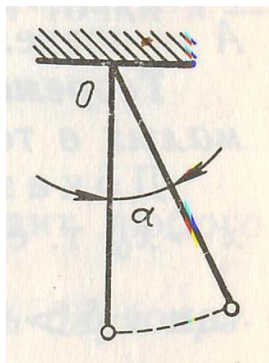
Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный « A », обозначает: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Бесконечно малые функции

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Рассмотрим понятие бесконечно малой функции на примере колебаний

маятника.



Положение маятника определяется углом « α », на который маятник отклонен от положения равновесия. Вследствие сопротивления среды « α » по абсолютной величине с течением времени уменьшается. Поэтому, какое бы положительное число « ϵ » ни было задано, отклонение $|\alpha|$ станет и будет оставаться меньше « ϵ ». Следовательно, в данном процессе угол « α » является бесконечно малой функцией.

Примерами бесконечно малых функций являются: масса тающей в воде льдины, разность уровней однородной жидкости в сообщающихся сосудах и т.д.

Бесконечно малая функция является величиной переменной, поэтому нельзя отождествлять очень малое число с бесконечно малой функцией. Нуль - единственное число, условно рассматриваемое как бесконечно малая функция вследствие того, что $|0| = 0 < \epsilon$, где « ϵ » - сколь угодно малое положительное число.

Понятие бесконечно малой функции при его практическом применении приводит к затруднению: ни одна реальная величина не может безгранично приближаться к нулю. Например, реальный маятник через некоторое время остановится, а газ не может безгранично расширяться.

Таким образом, определение бесконечно малой величины можно применять лишь к «математической модели» реального процесса.

Свойства бесконечно малых функций

Если функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ имеет предел, равный числу « A », то она может быть представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая.

2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке x_0 функций есть бесконечно малая функция: $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$

3. Произведение ограниченной при $x \rightarrow x_0$ функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция:

Следствие 1. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть функция бесконечно малая. $|\alpha(x)| < \epsilon / C < \epsilon$

Следствие 2. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Основные теоремы о пределах

1. Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$

2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме их пределов: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$$

4. Предел отношений двух функций равен отношению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}$$

Пример. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3)$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} (4x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} (6x) + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 4(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 7$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

• Основная:

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• Дополнительная:

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• Электронные издания:

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>
2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - 6-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>
3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• Электронные ресурсы:

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>, ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. Что такое функция?
2. Какие способы задания функции знаете?

Лекция №6

1. **Тема:** Производная элементарной и сложной функций.
2. **Цель:** Объяснить студентам нахождение производных элементарных и сложных функций.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Общее правило нахождения производной.
3. Определение производной.
4. Основные правила дифференцирования элементарных функций.
5. Производные элементарных и сложных функций.
6. Определения возрастающей и убывающей на интервале функции.
7. Необходимые условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале.
8. Достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале.

В чём заключается цель использования понятия производной и дифференциала в медицинских и фармацевтических отраслях?

Для определения процессов протекающих в живом организме, закона растворения лекарственных форм; обмена веществ, энергии и информации; теплообмена; скорости протекания химической реакции и других процессов необходимо понятие производной.

В чем смысл производной функции?

Пусть дана функция $y=f(x)$. Для определения производной необходимо:

1. Независимый аргумент "x" получает приращение Δx .
2. Соответственно функция $y=f(x)$ получает приращение Δy , т.е. $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.
3. Определяется приращение функции: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.
4. Определяется отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

5. Определяется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, при условии, что этот предел существует, называется производной функции в точке.

Основные правила определения производной функции

1. Производные суммы или разности двух функций равна сумме или разности производных этих функций: $(u \pm v)'_x = u'_x \pm v'_x$.

2. Производная произведения двух функций равна сумме произведений второй функции на производную первой и первой функции на производную второй:

$$(uv)'_x = u'_x v + uv'_x$$

3. Производная частного двух функций равна дроби, знаменатель которого равен квадрату знаменателя функции. А числитель есть разность между произведениями знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{u'_x v - uv'_x}{v^2}$$

Элементарной называют функцию, которая зависит только от одного аргумента:

$$y=f(x).$$

Сложной называют функцию, которая зависит от нескольких аргументов:

$$z=f(u), \quad u=\varphi(x) \quad \text{или} \quad z=f(\varphi(x)).$$

Производная сложной функции определяется производной данной функции «z» по промежуточному аргументу «u», умноженной на производную самого промежуточного аргумента «u» по независимой переменной «x».

Таблица основных формул определения производной

Элементарные функции	Сложные функции
1. $(C)'_x = 0$. 2. $(Cx)'_x = C(x)'_x$. 3. $(x)'_x = 1$.	
4. $(x^n)'_x = nx^{n-1}$;	$(u^n)'_x = nu^{n-1}u'_x$
5. $(a^x)'_x = a^x \ln a$;	$(a^u)'_x = a^u u'_x \ln a$
6. $(e^x)'_x = e^x$;	$(e^u)'_x = e^u u'_x$.
7. $(\log_a x)'_x = \frac{1}{x \ln a}$;	$(\log_a u)'_x = \frac{u'_x}{u \ln a}$.
8. $(\lg x)'_x = \frac{1}{x} 0,4343$;	$(\lg u)'_x = \frac{u'_x}{u \ln 10} \approx \frac{u'_x}{u} 0,4343$

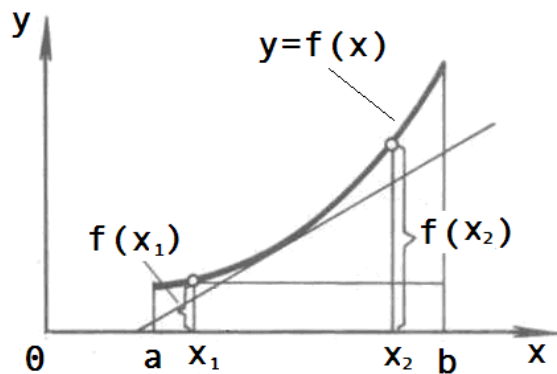
Элементарные функции	Сложные функции
9. $(\ln x)'_x = \frac{1}{x}$;	$(\ln u)'_x = \frac{u'_x}{u}$.
10. $(\sin x)'_x = \cos x$;	$(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$
11. $(\cos x)'_x = -\sin x$;	$(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x$
12. $(\operatorname{tg} x)'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$;	$(\operatorname{tg} u)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} u'_x$
13. $(\operatorname{ctg} x)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$(\operatorname{ctg} u)'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} u'_x$
14. $(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arcsin u)'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$
15. $(\arccos x)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos u)'_x = -\frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$

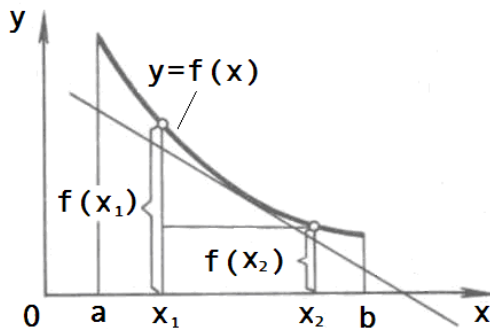
Элементарные функции	Сложные функции
16. $(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arctg} u)'_x = \frac{u'_x}{1+u^2}$
17. $(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)'_x = -\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} u)'_x = -\frac{u'_x}{1+u^2}$

Исследование функций с помощью производных основано на связи, существующей между поведением функции и свойствами ее производных.

Функция $f(x)$ называется возрастающей на интервале $]a, b[$, если для любых двух точек « x_1 » и « x_2 » из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$. Если из неравенства $x_2 > x_1$ следует строгое неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется строго возрастающей.

Функция $f(x)$ называется убывающей на интервале $]a, b[$, если для любых двух точек « x_1 » и « x_2 » из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \leq f(x_1)$. Если из неравенства $x_2 > x_1$ следует строгое неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется строго убывающей.





Строго возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Примером монотонной функции может служить концентрация лекарственного препарата в крови.

При однократном введении лекарственного препарата концентрация его в крови с течением времени является убывающей функцией. При непрерывном внутрисосудистом введении препарата с постоянной скоростью изменение концентрации в крови с течением времени является возрастающей функцией.

Существуют и немонотонные функции. Например, температура воздуха в течение недели - немонотонная функция, хотя на протяжении нескольких часов она может быть монотонной, повышаясь к полудню или понижаясь к вечеру.

Необходимые условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале:

1. Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на интервале $]a, b[$, то в любой точке « x » этого интервала $f'(x) \geq 0$.
2. Если дифференцируемая функция $f(x)$ убывает на интервале $]a, b[$, то в любой точке « x » этого интервала $f'(x) \leq 0$.
3. Если дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале $]a, b[$ не изменяется (есть постоянная), то ее производная $f'(x) = 0$.

Достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале

1. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ на интервале $]a, b[$ положительна, то функция $f(x)$ на этом интервале строго возрастает.
2. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ на интервале $]a, b[$ отрицательна, то функция $f(x)$ на этом интервале строго убывает.
3. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ на интервале $]a, b[$ равна нулю, то функция $f(x)$ на этом интервале не изменяется.

4. **Иллюстративный материал:** Презентация, слайды.

5. Литература:

• Основная:

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В.

Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012

3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• **Дополнительная:**

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• **Электронные издания:**

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>
2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - б-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>
3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>, ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. В чем смысл производной функции?
2. Чем отличается производная элементарной функции от сложной?
3. Для какой цели используются производные функции в фармацевтике?
4. в каком случае функция строго убывает?
5. условия необходимого прироста и убывания функции.

Лекция №7

1. Тема: Дифференциал функции.

2. Цель: Объяснить студентам понятие дифференциала функции.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Связь дифференциала функции с производной.
2. Свойства дифференциала.

3. Таблица дифференциалов функций.

В чем отличие дифференциала от производной функции?

Из определения производной следует: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

Если заменить предел производной положительной очень малой величиной « α », тогда получается: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, $\Delta y = y' \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$,

Второе слагаемое по величине на степень меньше, поэтому стремится к нулю.
 $\alpha \cdot \Delta x \rightarrow 0$

В таких случаях для приблизительного вычисления приращение « Δ » заменяется на « d »: $\Delta \approx d \quad dy = y' dx + 0$

Главная линейная часть приращения называется дифференциалом функции.
 $dy = y' dx$

Дифференциал функции используется для приближенных вычислений.

Как определяется дифференциал функции?

Чтобы определить дифференциал функции, необходимо определить первую производную данной функции и умножить её на дифференциал независимого аргумента.

Пример. Дана функция: $y = 2x^3 - 4x + 5$ Найти дифференциал функции:
 $dy = (y)' dx = (2x^3 - 4x + 5)' dx = (6x^2 - 4) dx$.

Свойства дифференциала:

1. Дифференциал постоянной величины равен нулю: $y = c$, где c - постоянная величина, $y' = 0$, $dc = 0$

2. Дифференциал алгебраической суммы и разности нескольких функций равен алгебраической сумме и разности дифференциалов этих функций:

$$d(\Gamma + \mu - \psi) = d\Gamma + d\mu - d\psi$$

3. Постоянный множитель выносится за знак дифференциала без изменений:

$$d(cu) = c du$$

4. Дифференциал произведения двух сомножителей равен произведению первого сомножителя на дифференциал второго плюс произведение второго сомножителя на дифференциал первого:

$$d(uv) = u dv + v du$$

5. Дифференциал частного равен дроби, числитель которой есть произведение знаменателя дроби на дифференциал числителя минус произведение числителя на дифференциал знаменателя, а знаменатель есть квадрат знаменателя дроби:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

6. Дифференциал сложной функции ($y=f(u)$, $u=g(x)$ - функции от функции) равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента: $df(u) = f'(u) du$

Таблица дифференциалов функций:

$$1. dx^n = nx^{n-1} dx.$$

$$2. da^x = a^x \ln a dx.$$

$$3. d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}.$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}.$$

$$4. d(\sin x) = \cos x dx.$$

$$5. d(\cos x) = -\sin x dx.$$

$$6. d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$7. d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$8. d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9. d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$11. d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

$$12. df(u) = f'(u) du$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

• **Основная:**

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• **Дополнительная:**

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• **Электронные издания:**

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>
2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - 6-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>
3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б.

https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>, ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. В чем отличие дифференциала от производной функции?
2. Как определяется дифференциал функции?

Лекция №8

1. Тема: Построение график функции

2. Цель: Объяснить студентам построение графика с использованием исследования функции.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Алгоритм построения графика функции.
2. Построение графика функции на примере.

Алгоритм построения графика функции:

1. Найти область определения функции.
2. Установить, обладает ли функция симметрией (исследовать функцию на четность).
3. Исследовать функцию на непрерывность, периодичность.
4. Рассмотреть поведение функции в окрестностях точек разрыва.
5. Определить поведение функции в бесконечности.
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции.
8. Определить точки перегиба.
9. Определить интервалы выпуклости и вогнутости.
10. Составить сводную таблицу и построить график функции.

Построение графика функции на примере: $y = x^3 - 3x$

1. Функция определена при всех $x \in]-\infty, +\infty[$.
2. Определим интервалы возрастания и убывания функции:

Определить первую производную: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Возрастание функции на интервале: если $f'(x) > 0$. В данном случае $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$, если $x^2 > 1$, или $|x| > 1$.

Следовательно, функция $y = x^3 - 3x$ возрастает на интервалах $]-\infty, -1[$ и $]1, +\infty[$.

Убывание функции на интервале: если $f'(x) < 0$.

В данном случае $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$, откуда $x^2 < 1$, или $-1 < x < 1$.

Следовательно, функция $y = x^3 - 3x$ убывает на интервале $]-1, 1[$.

3. Определим критические точки и исследуем их характер:

Приравняв первую производную к нулю ($f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$) найдем

критические точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Определим знак первой производной в окрестностях точек $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Для точки $x_1 = -1$: $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. Следовательно, $x_1 = «-1»$ - точка максимума. Максимум функции $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$. Для точки $x_2 = 1$: $f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0$. Следовательно, $x_2 = «1»$ - точка минимума. Минимум функции $f(1) = (1)^3 - 3(1) = -2$

4. Определим точку непрерывной кривой, отделяющая участок выпуклости от участка вогнутости (участок вогнутости от участка выпуклости), называемой точкой перегиба: Определим вторую производную: $f''(x) = 6x = 0$, Абсцисса точки перегиба при $x = 0 = 0$. Ордината точки перегиба $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$. Координаты точек перегиба $O(0; 0)$.

5. Определим интервалы выпуклости и вогнутости: Кривая выпукла при условии $f''(x) = 6x < 0$, откуда $x < 0$. Следовательно, кривая выпукла на интервале $]-\infty, 0[$. Кривая вогнута при условии $f''(x) = 6x > 0$, откуда $x > 0$. Следовательно, кривая вогнута на интервале $]0, +\infty[$. 6. Найдем точки пересечения кривой с осью Ox :

$$\text{Составим систему уравнений } \left. \begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ x = 0 \end{array} \right\}$$

и находим точки пересечения кривой с осью Ox :

Подставляя значения $x=0$ в систему, находим значения $y=0$.

Координаты точек пересечения кривой с осью Ox : $O(0; 0)$.

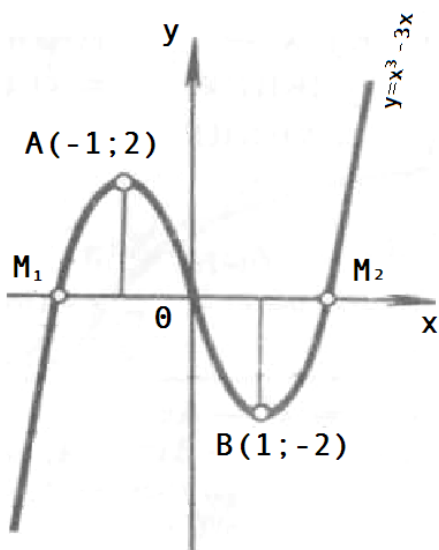
7. Найдем точки пересечения кривой с осью Oy :

$$\text{Составим систему уравнений } \left. \begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

и находим точки пересечения кривой с осью Oy и подставляя значения $y=0$ в систему, находим значения: $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{3}$; $x_3 = -\sqrt{3}$

Координаты точек пересечения кривой с осью Oy : $M_1(-\sqrt{3}; 0)$; $M_2(\sqrt{3}; 0)$.

9. Сведем результаты исследования в таблицу:



x	-1	0	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
f(x)	2	0	-2	0	0
f'(x)	0	-3	0		
f''(x)	-6	0	+6		
Характер точки	max	перегиб	min		

10. Построим график функции $y = x^3 - 3x$:

Координаты всех точек:

1. O(0; 0) - точка перегиба.

2. A(-1; 2) – точка max.

3. B(1; -2) – точка min.

4. O(0; 0) - точка пересечения кривой с осью Ox.

5. M1(- $\sqrt{3}$; 0); M2($\sqrt{3}$; 0) - точки пересечения кривой с осью Oy.

4. **Иллюстративный материал:** Презентация, слайды.

5. **Литература:**

• **Основная:**

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• **Дополнительная:**

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• **Электронные издания:**

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>
2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - 6-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>

3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>, ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. Из каких последовательностей состоит построения графика функции?
2. Какая точка называется точкой перегиба?

Лекция №9

1. Тема: Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Методы вычисления неопределенного интеграла

2. Цель: Дать понятие неопределенного интеграла.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Связь дифференциала функции с производной.
2. Свойства дифференциала.
3. Таблица дифференциалов функций.
4. Методы вычисления неопределенного интеграла.

В чём отличие неопределенного интеграла от дифференциала функции?

С помощью дифференциала определяется измененный вид функции, а с помощью интеграла можно определить первоначальный вид это функции или первообразной функции. Совокупность первообразных: $F(x)+C$ для данной функции или данного дифференциала $f(x)dx$ называют неопределенным интегралом от функции и обозначают: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Где: \int - обозначение неопределенного интеграла, x – независимый аргумент, $f(x)$ – подинтегральная функция, $f(x)dx$ – подинтегральное выражение, $F(x)$ – первообразная функции, C – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)'_x = f(x)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению: $d \int f(x)dx = f(x)dx$

3. Интеграл от дифференциала первообразной функции равен самой первообразной функции и произвольной постоянной: $\int dF(x) = F(x) + C$

4. Постоянный множитель «к» выносится за знак неопределенного интеграла без изменений: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

5. Интеграл от алгебраической суммы или разности конечного числа функций равен алгебраической сумме или разности интегралов от слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

Основные формулы интегрирования:

$$1. \int dx = x + C.$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; (n \neq -1).$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$12. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$13. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

Методы вычисления неопределенных интегралов:

Непосредственное интегрирование:

Этот метод используется в тех случаях, когда для интегрирования подинтегральной функции используются либо основные свойства интегрирования, либо функция приводится к табличным интегралам.

$$1. \int (5x^2 + 2x - 3)dx = 5 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 3 \int dx = 5 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{5}{3} x^3 + x^2 - 3x + C$$

$$2. \int (x^4 + 7^x)dx = \int x^4 dx + \int 7^x dx = \frac{x^5}{5} + \frac{7^x}{\ln 7} + C$$

2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной):

Этот метод используется в тех случаях, когда подинтегральная функция $\int f(x)dx$ имеет сложный аргумент. Для вычисления сложная часть аргумента заменяется $x = \varphi(t)$ более элементарной функцией. Тогда новая функция записывается в виде: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Эта формула называется формулой метода интегрирования подстановкой или заменой переменной.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} = \left. \begin{array}{l} 2x+3=t \\ d(2x+3)=dt \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} t^{\frac{-\frac{1}{2}+1}{-1/2+1}} + C = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \sqrt{t} + C = \sqrt{t} + C$$

3. Интегрирование по частям:

Этот метод используется в тех случаях, когда подинтегральная функция задана в виде произведения двух разных функций: $u = u(x)$ и $v = v(x)$.

Если эти функции дифференцируемы, то $d(uv) = vdu + u dv$, откуда $u dv = d(uv) - v du$. Интегрируя обе части данного выражения, получаем формулу

интегрирования по частям: $\int u dv = u \cdot v - \int v du$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ \int d\vartheta = \int e^x dx \\ \vartheta = e^x + c; c = 0 \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

• Основная:

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• Дополнительная:

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• Электронные издания:

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>

2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - б-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б.
<http://elib.kaznu.kz>
3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б.
https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б.
https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>, ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. В чём отличие неопределенного интеграла от дифференциала функции?
2. Какие знаете основные свойства неопределенного интеграла?
3. Методы интегрирование.

Лекция №10

1. Тема: Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла и методы вычисления. Применение определенного интеграла

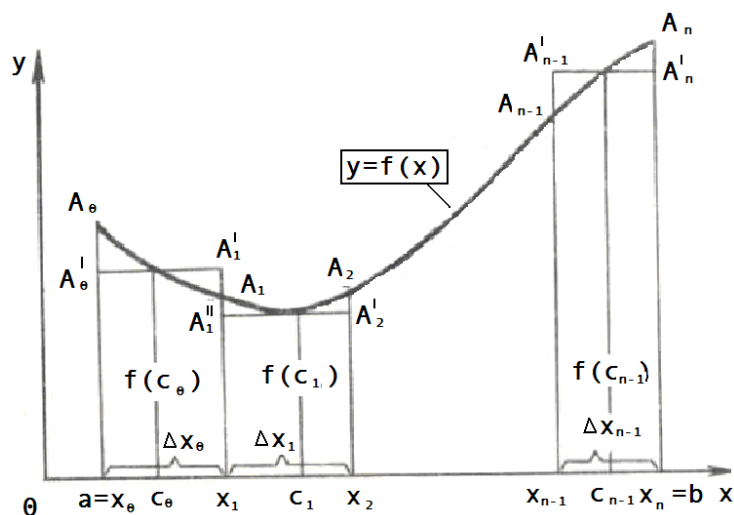
2. Цель: Дать понятие определенного интеграла.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Определенный интеграл.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Связь между неопределенным и определенным интегралом.
4. Методы интегрирования.
5. Вычисление площади плоских фигур.
6. Работа с переменной силой

Понятие определенного интеграла широко используется в математике, фармации, инженерных технологиях и прикладных науках. С его помощью



вычисляют площади, ограниченные кривыми, длины дуг, объемы тел произвольной формы, работу переменной силы, скорость, путь, моменты инерции тел и т. д. Рассмотрим задачу по определению площади

криволинейной трапеции, приводящую к понятию определенного интеграла. Фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, называется криволинейной трапецией.

Предположим, что $f(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, т. е. криволинейная трапеция расположена над осью Ox . Для вычисления площади « S » данной криволинейной трапеции разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на « n » частей и обозначим точки деления: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Проведя из этих точек перпендикуляры до пересечения с кривой, получим значения функции в этих точках: $y = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$; ...; $y_{n-1} = f(x_{n-1})$; $y_n = f(x_n)$. В результате этого площадь криволинейной трапеции окажется разбитой на сумму площадей « n » элементарных криволинейных трапеций

На отрезках $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$ возьмем совершенно произвольные точки $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ и проведем перпендикуляры из этих точек до пересечения с кривой $y = f(x)$. Получим $f(c_0), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1})$. Далее построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, имеющих своим основанием отрезки $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$, а высотой - ординаты $f(c_0), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1})$.

Эта фигура ограничена ломаной линией $A_0' A_1' A_1'' A_2' \dots A_n'$. Площадь « S_n » полученной ступенчатой фигуры зависит от числа « n » и длины отрезков Δx_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$). При неограниченном увеличении числа « n » и уменьшении максимального отрезка Δx_i площадь « S_n » ступенчатой фигуры будет приближаться к площади трапеции « S », т.е. площадь криволинейной трапеции следует называть пределом, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры. Площадь « S_n » равна сумме площадей прямоугольников, построенных

на отрезках:
$$S_n = f(c_0) \Delta x_0 + f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_{n-1}) \Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (\Delta x_i).$$

Если неограниченно увеличивать число « n » частей разбиения так, чтобы длина наибольшего из отрезков « Δx_i » стремилась к нулю, то площадь криволинейной трапеции будет равна пределу суммы, каждое слагаемое которой равно произведению значения функции в точке отрезка $f(c_i)$ на величину этого

отрезка « Δx_i »:
$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (\Delta x_i).$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Если существует конечный предел интегральной суммы, то этот предел называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и

обозначают:
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (\Delta x_i).$$

Где, $f(x)$ - называется подынтегральной функцией, « x » — переменной

интегрирования, числа «а» и «b» - нижним и верхним пределами интегрирования.

Определенный интеграл есть число, его значение зависит от вида функции $f(x)$ и значений верхнего и нижнего пределов. Площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от функции, ограничивающей трапецию, взятому по

основанию $[a, b]$:
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

С помощью определенного интеграла решаются задачи из любой области науки и техники, если их решение сводится к нахождению существующего предела интегральной суммы.

Основные свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной

интегрирования:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

2. Определенный интеграл от суммы непрерывных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$, равен сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx$$

3. Постоянный множитель «к» подынтегральной функции можно выносить за

знак определенного интеграла:
$$\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

4. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

5. Если пределы интегрирования равны между собой ($b = a$), то определенный

интеграл равен нулю:
$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

6.
$$\int_a^b dx = b - a$$

7. Если существуют интегралы, $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ то существует

интеграл $\int_a^b f(x)dx$ для любого взаимного расположения точек «а», «b», «с»:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

8. Если подынтегральная функция на отрезке интегрирования сохраняет постоянный знак, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция: если $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

функция: если $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Общность обозначения определенного и неопределенного интегралов подчеркивает тесную связь между ними, хотя определенный интеграл выражает число, а неопределенный интеграл - совокупность первообразных функций.

Связь между определенным и неопределенным интегралами устанавливает

формула Ньютона — Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Методы вычисления определенных интегралов

Непосредственное интегрирование:

Этот метод используется в тех случаях, когда для интегрирования подынтегральной функции используются либо основные свойства интегрирования, либо функция приводится к табличным интегралам.

$$\int_1^2 (2x+3)dx = \int_1^2 2xdx + \int_1^2 3dx = 2 \int_1^2 xdx + 3 \int_1^2 dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + 3x \Big|_1^2 = (2^2 - 1^2) + 3(2 - 1) = 6$$

2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной):

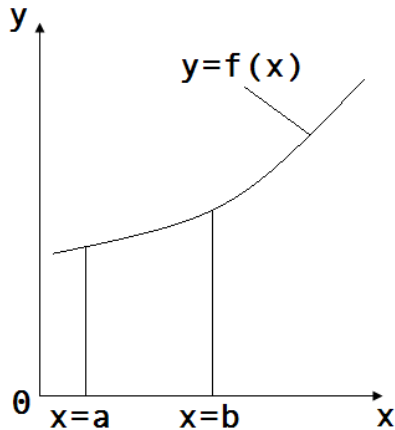
Этот метод используется в тех случаях, когда подынтегральная функция имеет сложный аргумент.

Для вычисления сложная часть аргумента заменяется более элементарной функцией.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \left| \begin{array}{l} 4-x=t \\ d(4-x)=dt \\ dx=-dt \\ t_1=4 \\ t_2=2 \end{array} \right| = -\int_4^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int_4^2 t^{-\frac{1}{2}} dt = -2\sqrt{t} \Big|_4^2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{4} = -2\sqrt{2} + 4 = 1,18$$

Вычисление площадей плоских фигур

Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.



Если $f(x) > 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$,

численно равна интегралу: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Пример. Определить площадь плоской фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox при условии $0 \leq x \leq 2\pi$.

Решение: Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на два отрезка $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$. На отрезке $[0, \pi]$ $\sin x \geq 0$ следовательно:

$$S_1 = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2 \text{ кв.ед.}$$

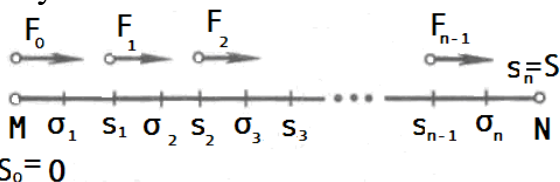
На отрезке $[\pi, 2\pi]$ $\sin x \leq 0$, следовательно:

$$S_2 = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = |-(\cos 2\pi - \cos \pi)| = 2 \text{ кв.ед.}$$

Искомая площадь $S = S_1 + S_2 = 2 + 2 = 4$ кв.ед.

Работа переменной силы

Тело движется по прямой «MN» под действием переменной силы $F=f(s)$. Направление силы совпадает с направлением движения. Требуется определить работу, производимую силой при перемещении тела из положения «M» в положение «N». Разобьем путь «MN» точками $s_0=0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n = S$ на «n» элементарных отрезков. В каждом элементарном отрезке выберем точку σ_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) при этом, сила $f(\sigma_i)$ на каждом элементарном отрезке постоянна. Тогда произведение $f(\sigma_i) \Delta s_i$ будет приближенно равно работе силы на пути Δs_i .



$$A = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i) \Delta s_i = \int_0^S f(S) ds$$

$$\text{или } A = \int_0^S f(S) ds$$

Сумма работ на элементарных отрезках:

Пример:

Вычислить работу, совершенную одним

молем идеального газа при обратимом изотермическом расширении от $2,24 \cdot 10^{-3}$ до $22,4 \cdot 10^{-3}$ м³ при $t = 0^\circ\text{C}$.

Решение.

При обратимом расширении одного моля идеального газа давление $p = RT/V$. Совершаемая газом при изменении объема на величину dV элементарная работа $dA = pdV$. Полная работа расширения газа от начального объема V_1 до конечного объема V_2 .

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 8,32 \cdot 273 \ln \frac{22,4 \cdot 10^{-3}}{2,24 \cdot 10^{-3}} = 5,23 \text{ кДж.}$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

• **Основная:**

1. Математика: учебник/ И.В. Павлушков, Л.В. Розовский, И.А. Наркевич.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 320 с
2. Основы высшей математики и математической статистики: учебник / И.В. Павлушков [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012
3. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014

• **Дополнительная:**

1. Краснов М, Киселев А. Высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций несколько переменных. Т.2, изд. ЛКИ, Едисториал, УРСС.М., 2017.
2. Газизова Н.Н., Никонова Н.В. Пределы функции одной переменной. Уч.пособ. Изд.КНИТУ, 2014.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие бакалавров.- 11-е изд. переработан. и дополн. М.: Юрайт, 2013.

• **Электронные издания:**

1. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015ж <https://aknurpress.kz/login>
2. Е. Ж. Айдос. Жоғары математика-1 [Мәтін]: оқулық: 3-кітап/ ҚР Білім және ғылым м-гі. - 6-бас., өнд., толықт. - Алматы: Бастау, 2015. – 317 б. <http://elib.kaznu.kz>
3. Қ.Ж. Құдабаев және т.б. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
4. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
5. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

• **Электронные ресурсы:**

1. Консультант обучающегося: <http://www.studmedlib.ru/>, ЛОГИН ibragim123, ПАРОЛЬ Libukma123

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. От чего зависит площадь ступенчатой фигуры?

2. Какая сумма называется интегральной суммой?
3. Что называют определенным интегралом?
4. Какие основные свойства определенного интеграла вы знаете?
5. Как определяется величина заданного интеграла?
6. Как определяется площадь плоских фигур?
7. Как определяется работа переменной силы?

ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН

**MEDISINA
AKADEMIASY**

«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ



SOUTH KAZAKHSTAN

**MEDICAL
ACADEMY**

АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»

Кафедра медицинской биофизики и информационных технологий

Лекционный комплекс по дисциплине «Математика - часть 1»

044 -35/11 (М) ()

Стр. 40 из 40