ЛЕКЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС

Дисциплина: Математика – часть 2

Код дисциплины: Mat 1201-2

Название и шифр ОП:6В07201-«Технология фармацевтического производства»

Объем учебных часов/кредитов: 150/5

Курс и семестр изучения: 1,2

Объем лекции: 10 (часов)

Шымкент, 2024г.

Лекционный комплекс разработан в соответствии с рабочей учебной программой дисиплины (силлабусом) «Математика – часть 2» и обсужден на заседании кафедры

Протокол №11 от «30» 05 2024 г.

Зав.кафедрой ______________ Иванова М.Б.

Лекция №1

1. Тема: Дифференциал функции нескольких аргументов
2. Цель: Объяснить студентам понятие дифференциала функции нескольких переменных.
3. Тезисы лекции:
План лекции:

1. Понятие функции нескольких аргументов.
2. Полные и частные приращения функций двух аргументов.
3. Частные производные функции двух аргументов.
4. Частные производные высших порядков.
5. Частный и полный дифференциалы функций двух аргументов.

Понятие функции нескольких аргументов:
Большинство процессов, протекающих в окружающей нас природе, подчинены законам, выражающим зависимость между несколькими аргументами, один из которых функционально связан с остальными. Например, площадь прямоугольника S=xy есть функция двух аргументов. Объем прямоугольного параллелепипеда V=xyz является функцией трех аргументов.
Уравнение состояния газа pV = RT представляет зависимость между тремя аргументами: давлением «p», объемом «V» и температурой «T» (R — универсальная газовая постоянная). Любая физиологическая характеристика организма (давление, температура, рост и т. д.) является функцией многих аргументов. Например, температура «T», измеряемая в различных точках тела, есть функция от координат точки, в которой она измеряется, и от момента времени «t»: T = f(x, y, z, t).
Для изучения таких зависимостей вводится понятие функции нескольких аргументов. Основные положения теории функций нескольких аргументов справедливы для функций двух аргументов.
Переменная «z» называется функцией двух аргументов «x» и «y», если некоторым парам значений (x, y) по какому-либо правилу или закону ставится в соответствие определенное значение «z».
Функция двух аргументов обозначается: z = f(x, y).
Полные и частные приращения функций двух аргументов:
Пусть дана некоторая функция двух аргументов z = f(x,y). Дадим «x» и «y» приращения «Δx» и «Δy» и получим значение функции в точке: (x+Δx; y+Δy). Разность f(x+Δx, y+Δy) - f(x,y) называется полным приращением функции z = f(x,y) и обозначается Δf: Δf = f (x+Δx, y+Δy) - f(x,y).
Если дадим приращение лишь одному аргументу, то функция z = f(x,y) получит частное приращение по этому аргументу. Разность f(x+Δx, y) - f(x,y) называется частным приращением функции z = f(x,y) по аргументу «x»: Δxf(x,y)= Δxf = f(x+Δx, y) – f(x,y). Разность Δyf(x,y) = Δyf = f(x, y+Δy) - f(x,y). называется частным приращением функции z = f(x,y) по аргументу «y».
Частные производные функции двух аргументов:
Частной производной первого порядка функции z = f(x,y) по аргументу «x» в рассматриваемой точке (x;y) называется предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

Частная производная функции z = f(x,y) по аргументу «x» обозначается:
z'x, fx '(x, y), $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}$

Аналогично частная производная по «у» обозначается:
z'y, fy '(x, y), $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}$

Так как частная производная - это обычная производная функции одного аргумента, то ее нетрудно вычислить. Для этого нужно пользоваться правилами дифференцирования, учитывая в каждом случае, какой из аргументов принимается за «постоянное число», а какой служит «переменной дифференцирования».
Замечание. Для нахождения частной производной, например по аргументу «х» - ∂f/∂x, достаточно найти производную функции f(x, y), считая «х» - функцией одного аргумента, а «у» - постоянной;
для нахождения ∂f/∂y - наоборот.
Частные производные высших порядков:
Функция f(x,y) имеет частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

Эти производные в свою очередь являются функциями аргументов «х» и «у». Частные производные этих функций называются частными производными второго порядка данной функции f(x,y).
Если существуют производные вторых производных, то они называются частными производными третьего порядка и т. д.
Частный и полный дифференциалы функций двух аргументов:
Функция z = f(x,y) имеет частные производные:
Произведение $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ называют частным дифференциалом функции f(x,y) по «х».
Произведение $\frac{\partial f}{\partial y}dy$ называют частным дифференциалом функции f(x,y) по «у».
Сумму частных дифференциалов функции z = f(x,y) называют ее полным дифференциалом:
$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. ІІ-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.

2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Кощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы :

1. Какие приращения называются частными приращениями функции двух аргументов?
2. В чем отличие частного дифференциала от производной функции двух аргументов?

Лекция №2

1. Тема: Двойной интеграл и их основные свойства
2. Цель: Объяснить студентам понятие двойного интеграла.
3. Тезисы лекции:
План лекции:

1. Понятие двойного интеграла.
2. Интегральная сумма.
3. Основные свойства двойного интеграла.
4. Правила вычисления двойных интегралов.

Пусть функция f(x,y) определена в ограниченной замкнутой области «D» плоскости Oxy. Разобьем область «D» произвольным образом на «n» элементарных областей, имеющих площади Δσ1, Δσ2, ..., Δσn и диаметры d1, d2, … , dn. Диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области. Выберем в каждой элементарной области произвольную точку Pk (ζk;ηk) и умножим значение функции в точке «Pk» на площадь этой области.
Интегральной суммой для функции f (x,y) по области «D» называется сумма:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k,\eta_k)\Delta\sigma_k = f(\varsigma_1,\eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\varsigma_2,\eta_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\varsigma_n,\eta_n)\Delta\sigma_n$$

Двойным интегралом от функции f(x,y) по области «D» называется предел интегральной суммы при условии, что наибольший из диаметров элементарных областей стремится к нулю:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

Если функция f(x,y) непрерывна в замкнутой области «D», то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения области «D» на элементарные и от выбора точек

Если f(x,y)>0 в области «D», то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью z = f(x,y), сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, и снизу областью «D» плоскости xOy.

Основные свойства двойного интеграла:

1. $\iint\limits_D (f_1(x,y)+f_2(x,y))d\sigma = \iint\limits_D f_1(x,y)d\sigma + \iint\limits_D f_2(x,y)d\sigma$

2. $\iint\limits_D (f_1(x,y)-f_2(x,y))d\sigma = \iint\limits_D f_1(x,y)d\sigma - \iint\limits_D f_2(x,y)d\sigma$

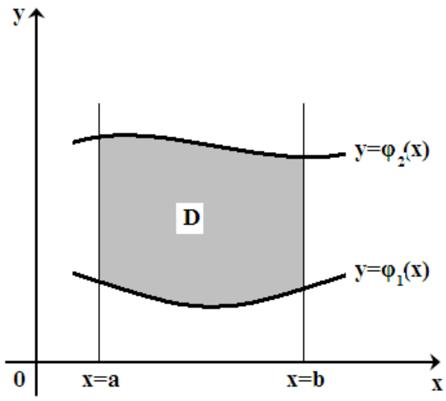
3. $\iint\limits_D c(f_1(x,y)d\sigma = c\iint\limits_D f_1(x,y)d\sigma$

4. Если область интегрирования «D» разбита на две области «D1» и «D2», то:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

Правила вычисления двойных интегралов:

1. Область интегрирования «D» ограничена слева и справа прямыми x = a и x=b (a < b), а снизу и сверху - непрерывными кривыми y=φ1(x) и y=φ2(x) причем φ1(x) ≤ φ2(x),
каждая из которых пересекается вертикальной прямой только в одной точке.



Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

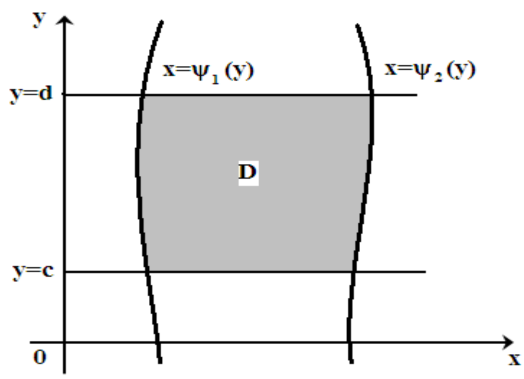
причем, сначала вычисляется интеграл, $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ в котором «x» считается постоянной.

2. Область интегрирования «D» ограничена снизу и сверху прямыми y=c и y=d (c<d), а слева и справа - непрерывными кривыми x= ψ1(y) и x = ψ2(y) причем ψ1(y)≤ ψ2(y), каждая из которых пересекается горизонтальной прямой только в одной точке.

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$$

причем, сначала вычисляется интеграл, $\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$ в котором «y» считается постоянной.



Правые части указанных формул называются двукратными или повторными интегралами.

1. Вычислить $\iint_D x\ln y\,dxdy$ если область «D» - прямоугольник 0 ≤ x ≤ 4, 1 ≤ y ≤ e.
Решение:

$$\iint_D x\ln y\,dxdy = \int_0^4 xdx\int_1^e \ln y\,dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \cdot \left[y\ln y - y\right]_1^e = 8(e-e+1) = 8$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. ІІ-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Кощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Мататматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы:

1. Что называем двойным интегралом?
2. Перечислите основные свойства двойного интеграла?

Лекция №3

1. Тема: Криволинейные интегралы первого, второго рода и их основные свойтсва

2. Цель: Объяснить студентам теорию криволинейных интегралов первого рода.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Криволинейный интеграл первого рода.
2. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода.
3. Криволинейный интеграл по координатам (криволинейный интеграл II рода).
4. Основные свойства криволинейного интеграла II рода

Криволинейный интеграл первого рода:

Функция f(x,y) определена и непрерывна в точках дуги «АВ» гладкой кривой «К», имеющей уравнение y=φ(x) (a≤x ≤b).

Разобьем дугу «АВ» произвольным образом на «n» элементарных дуг точками A = A0, A1, A2,…, An = B.

Пусть ΔSk - длина дуги Ak-1 Ak.

На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку Mk(ζk, ηk) и умножим значение функции f(ζk, ηk) в этой точке на длину ΔSk соответствующей дуги.

Интегральной суммой для функции f(x,y) по длине дуги «АВ» называется сумма:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k, \eta_k)\Delta S_k$$

Криволинейным интегралом по длине дуги «АВ» от функции f(x,y) называется предел интегральной суммы при условии, что maxΔSk→0:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta S_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k, \eta_k)\Delta S_k$$

где ds - дифференциал дуги.

Криволинейный интеграл I рода вычисляется по формуле

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)]\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода:

1. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$$

2. $\int_K [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]ds = \int_K f_1(x,y)ds \pm \int_K f_2(x,y)ds.$

3. $\int_K cf(x,y)ds = c\int_K f(x,y)ds,\ где\ "c" - постоянная$

4. Если контур интегрирования «К» разбит на две части К1 и К2, тогда:

$$\int_K f(x,y)ds = \int_{K_1} f(x,y)ds + \int_{K_2} f(x,y)ds.$$

Функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны в точках дуги «АВ» гладкой кривой «К», имеющей

уравнение y = φ(x) (a≤x ≤ y).
Интегральной суммой для функций P(x,y) и Q(x,y) по координатам называется сумма:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[P(\varsigma_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\varsigma_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

где Δxк и Δук — проекции элементарной дуги на оси «Ох» и «Оу».
Криволинейным интегралом II рода от выражения P(x,y)dx + Q(x,y)dy по направленной дуге «АВ» называется предел интегральной суммы при условии, что max Δxk→0 и max Δyk→0:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n}\left[P(\varsigma_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\varsigma_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

Криволинейный интеграл II рода есть работа, совершаемая переменной силой F= P(x,y)i + Q(x,y) j на криволинейном пути «АВ» (механическое истолкование).
Основные свойства криволинейного интеграла второго рода:
1. Криволинейный интеграл II рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy \quad \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy$$

Остальные свойства аналогичны свойствам интеграла I рода.
Криволинейный интеграл II рода вычисляется по формуле:

$$\int_{K} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b}\left\{P[x,\varphi(x)] + \varphi'(x)Q[x,\varphi(x)]\right\}dx$$

Вычислить: $\int_{K}(x-y)ds,$ где «К» - отрезок прямой от А(0; 0) до В (4;3).
Решение. Уравнение прямой от «АВ» имеет вид y = (3/4) x. Находим пройзводные: y' = 3/4, следовательно:

$$\int_{K}(x-y)ds = \int_{0}^{4}(x-\frac{3}{4}x)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int_{0}^{4}xdx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.
5. Литература:
- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. II-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304

8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Кощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы:

1. Какие интегралы называются криволинейными интегралами первого рода?
2. Назовите основные свойства криволинейного интеграла первого рода?
3. Какие интегралы называются криволинейными интегралами второго рода?
4. Назовите основные свойства криволинейного интеграла второго рода?

Лекция №4

1. Тема: Дифференциальные уравнения первого, второго порядка и их виды.
2. Цель: Объяснить студентам теорию дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Тезисы лекции:
План лекции:

1. Понятие дифференциальных уравнений.
2. Общее и частное решения дифференциальных уравнений.
3. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.
4. Дифференциальные уравнения второго порядка допускающие понижение порядка.
5. Не содержащие искомой функции и ее пройзводной.
6. Не содержащие искомой функции.
7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

В чём отличие дифференциальных уравнений от обычных уравнений?
Дифференциальным называют уравнение, связывающее аргумент «х», искомую функцию

y=f(x), её производные y′, y″…, y(n) или дифференциалы dy, d2y, … d(n)y.
Дифференциальное уравнение в общем виде можно записать:

$$F(x, y, y', y'', y''',..., \ y^{(n)}) = 0$$

$$F(x, dy, d^2y, d^3y,..., \ d^{(n)}y) = 0$$

Если искомая функция y=f(x) зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным: $y' = 4x^3$

От чего зависит порядок дифференциального уравнения?
Порядком дифференциального уравнение называется порядок наивысшей производной или дифференциала, входящих в уравнение.

$y' = 4x^3 + 3 - первого\ порядка$

$y'' + 4y' - y = 0 - второго\ порядка$

$y''' = \sin(x) \ \ - третьего\ порядка$

Если правая часть дифференциального уравнения равняется нулю, то такое уравнение называется однородным.
Если правая часть не равняется нулю, то уравнение называется неоднородным.
В чем отличие решение дифференциального уравнения от решения простого уравнения?
Общим решением дифференциального уравнения называется функция y=f(x,C),от «x» с произвольными постоянными «C», обращающая это уравнение в тождество. Общее решение записанное в неявном виде Φ(x,y,C)=0 называется общим интегралом.
Общее решение записанное в неявном виде Φ(x,y,C)=0 называется общим интегралом.
Чтобы найти частное решение, необходимо подбирать начальные условия. Подставив начальные условия (x, y, y′) в общее решение, определяется значение произвольных постоянных «C» дифференциального уравнения.
Затем, подставив значение произвольных постоянных в общее решение, получим функцию, которая называется частным решением
Виды дифференциальных уравнений:
1. Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, называется уравнение вида: $f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$

Для решения таких уравнений необходимо:
1) Разделить переменные:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0$$

Это дифференциальное уравнение с разделенными переменными.
2) Интегрировать обе части дифференциального уравнения с разделенными переменными:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$$

3) Полученная в результате интегрирования функция называется общим решением данного дифференциального уравнения.
Пример:

$$y' = y^2 \cos x \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx \Rightarrow \int y^{-2} dy = \int \cos x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x \qquad -y^{-1} = \sin x + C$$

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x dx \qquad \frac{1}{y} = -\sin x + C \ - \ \textit{общее решение}$$

2. Линейными дифференциальными уравнениями первого порядка называются уравнения вида: $y' + p(x)y = f(x)$

Решение таких уравнений находится с помощью произведения двух независимых функций y=uv,где u=u(x) v=v(x).

Для решения уравнения:

1) необходимо определить первую производную $y' = u'v + uv'$ от функции y=uv.
2) Подставить значение функции и производной в основное уравнение.

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

3) Из 2-го и 3-го слагаемого вынести переменную «u» за скобки.

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$$

4) Приравнивая к нулю второе слагаемое, определяем значение функции «v».

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = f(x) \end{cases}$$

$$v' = -p(x)v$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$$

$$\ln v = -\int p(x)dx$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

5) Подставляя найденное значение «v» в уравнение, определяем значение функции «u».

$$u'v = f(x)$$

$$u' = \frac{f(x)}{e^{-\int p(x)dx}}$$

$$u' = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$u = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

6) Решение уравнения: $y = uv = e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Дифференциальные уравнения второго порядка допускающие понижение порядка:

Дифференциальное уравнение вида: F(x, y, y', y") = 0, в которое входит вторая производная неизвестной функции y = f(x), называют дифференциальным уравнением второго порядка. Дифференциальное уравнение второго порядка y" = f(x, y, y') имеет общее решение y = φ(x, C1,C2), содержащее две произвольные постоянные.
Виды дифференциальных уравнений второго порядка допускающие понижение порядка:
1.1. Дифференциальные уравнения второго порядка не содержащие искомой функции и ее пройзводной:
Уравнение вида y" = f(x) называют дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим искомой функции и ее производной. Такие уравнения решаются двукратным интегрированием с введением новой функции, дающей возможность понизить их порядок. Введем новую функцию u(x),
положив y' = u(x), тогда y" = (y')' = u'(x), u'(x) = f(x) или du/dx = f(x).
Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$du = f(x)dx, \int du = \int f(x)dx, u(x) = \int f(x)dx + C_1$$

или

$$y' = \int f(x)dx + C_1, \frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C\ .$$

$$dy = (\int f(x)dx + C_1)dx,$$

Разделим переменные и проинтегрируем: $\int dy = \int (\int f(x)dx + C_1)dx,$

$$y = \int (\int f(x)dx) + C\ x + C_2$$

- общее решение данного дифференциального уравнения.
Пример. Найти общее решение уравнения y" = x.
Решение. Обозначим y' = u(x), тогда y"= u'(x) и u'(x) = x или du/dx = x. Разделив переменные и проинтегрировав, найдем первую производную:

$$du = xdx, \int du = \int xdx, u = \frac{x^2}{2} + C_1$$

или

$$y' = \frac{du}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Разделив в уравнении переменные и проинтегрировав его, найдем функцию y:

$$dy = \frac{x^2}{2}dx + C_1 dx, \int dy = \int \frac{x^2}{2}dx + \int C_1 dx.$$

Таким образом, y = x3/6 + C1x + C2 — общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные C1, и C2.
1.2 Дифференциальные уравнения второго порядка не содержащие искомой функции:
Уравнение вида y" = f(x,y') называют дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащие искомой функции. Введя новую функцию y' =z(x), получим уравнение первого порядка порядка относительно z:
z' = f(x, z).
Пример.
Найти общее решение уравнения: (1 + x2)y" - 2xy' = 0.
Решение.

Обозначим y' = z(x), y'' = z'(x), тогда: $(1+x^2)z' - 2xz = 0,$ $(1+x^2)\dfrac{dz}{dx} - 2xz = 0$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2x}{1+x^2}dx;$$

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{2x}{1+x^2}dx:$$

$$\ln(z) = \ln(1+x^2) + \ln(C_1)$$

Потенцируем выражение: z=C1(1+x2). Так как z = y', то y'=C1(1+x2) или dy/dx = C1(1 + x2).
Разделив переменные и проинтегрировав, получим: dy = C1(l+x2)dx;

$$\int dy = \int C_1(1+x^2)dx$$

откуда y = C1 x3/3+ C1x+ C2 — общее решение данного уравнения.

2. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (p, q - const), называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Общее решение такого уравнения определяется с помощью функции Эйлера: y=ekx.

Для решения уравнения:

1) Необходимо определить от функции Эйлера (y=ekx) первую и вторую производные от этой функции:

$$y' = ke^{kx},$$

$$y'' = k^2e^{kx}$$

2) Полученные значения функции, первой и второй производной подставить в основное уравнение:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

3) Вынося функцию Эйлера за скобки и, учитывая, что она не равна нулю, записать выражение в скобках равное к нулю:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

$$e^{kx} \neq 0, k^2 + pk + q = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

Данное уравнение называется характеристическим уравнением однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

4) Определить корни характеристического уравнения: $k^2 + pk + q = 0,$ $k_{1/2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$

5) Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения:

5.1 Если корни k1 и k2 характеристического уравнения действительные и различные числа,

$$D > 0, k_1 \neq k_2$$

то общее решение уравнения имеет вид: $$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

5.2 Если корни k1 и k2 характеристического уравнения действительные и равные числа, то

$$D = 0, k_1 = k_2 = k$$

общее решение уравнения имеет вид: $$y = e^{kx}(C_1 x + C_2)$$

5.3 Если корни k1 и k2 характеристического уравнения комплексные или мнимые числа, то общее решение уравнения имеет вид:

$$D < 0, k_1 \neq k_2, k_{1/2} = \alpha + \beta i$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$где: \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{D}, i = \sqrt{-1}.$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. II-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Коцанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық.

Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Мататматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы:
1. Чем отличается частное решение дифференциального уравнения от общего?
2. Для какой цели используются дифференциальные уравнения в фармации?
3. Для какой цели используются дифференциальные уравнения второго порядка в фармации?

Лекция №5

1. Тема: Составление и решение дифференциальных уравнений на примерах задач физико-химического и фармацевтического содержания

2. Цель: Объяснить студентам теорию составления и решение дифференциальных уравнений на примерах задач физико-химического и фармацевтического содержания.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

Прикладные задачи фармации, биологии и медицины:
1. Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток.
2. Закон размножения бактерий с течением времени.
3. Закон роста клеток с течением времени.
4. Закон разрушения клеток в звуковом поле.
5. Составление и решение дифференциальных уравнений в теории эпидемий.

Дифференциальные уравнения занимают важное место в решении задач физико-химического, фармацевтического и медико-биологического содержания. Пользуясь ими, мы устанавливаем связь между переменными величинами, характеризующими данный процесс или явление.

Решение любой задачи с помощью математического анализа можно разбить на три этапа:
1. перевод условий задачи на язык математики;
2. решение задачи;
3. оценка результатов.

Первая часть работы обычно заключается в составлении дифференциального уравнения и является наиболее трудной, так как общих методов составления дифференциальных уравнений нет и навыки в этой области могут быть приобретены лишь в результате изучения конкретных примеров:

Прикладные задачи фармации, биологии и медицины:

1. Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток:

Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке. Установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.

Обозначим через «m» количество вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения «t»: $dm/dt = - km$, где k — постоянная скорости растворения. Знак минус означает, что количество лекарственных форм вещества с течением времени убывает.

$$\frac{dm}{dt}=-k\,dt,$$

Разделим переменные и проинтегрируем: $\int\frac{dm}{dt}=-\int k\,dt, \ln(m)=-kt+\ln(C),$

$$\ln(m)=\ln e^{-kt}+\ln(C),$$

$$m=Ce^{-kt}.$$

Полагая, что при t = 0, m = m0, получаем
C = m0,   следовательно:
m = m0e-kt – закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток.
2. Закон размножения бактерий с течением времени:
Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Установить зависимость изменения количества бактерий от времени.
Количество бактерий, имеющихся в данный момент, через «x». Тогда:
dx/dt = kx,   где «k» — коэффициент пропорциональности. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dx}{x}=kdt, \qquad \ln(x)=kt+\ln(C),$$

$$\int\frac{dx}{x}=k\int dt, \qquad \ln(x)-\ln(C)=kt \qquad \ln(\frac{x}{C})=kt, \frac{x}{C}=e^{kt}, x=Ce^{kt}.$$

Полагая, что при t=0, x = x0, получаем C = x0, следовательно, x = x0ekt   - Закон размножения бактерий с течением времени.
3. Закон роста клеток с течением времени:
Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к ее объему сохраняется постоянным, скорость роста клетки dL/dt пропорциональна длине клетки «L»:
dL/dt = (α - β)L,   где α, β - постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада.

$$\frac{dL}{L}=(\alpha-\beta)dt,$$

$$\int\frac{dL}{L}=\int(\alpha-\beta)dt,$$

Разделим переменные и проинтегрируем: $\ln(L)=(\alpha-\beta)t+\ln(C),$

$$\ln(L)-\ln(C)=(\alpha-\beta)t$$

$$\ln(\frac{L}{C})=(\alpha-\beta)t, \frac{L}{C}=e^{(\alpha-\beta)t}, L=Ce^{(\alpha-\beta)t}.$$

При t = 0, L= L0 постоянная C = L0, поэтому
L=L0e(a- βt) – закон роста палочковидных клеток с течением времени.
4. Закон разрушения клеток в звуковом поле:
Кавитация ультразвуковых волн проявляется в виде разрывов суспензионной среды и образования мельчайших пузырьков и пустот, плотность которых незначительна по сравнению с плотностью воды. Простейшие бактерии, водоросли, дрожжи, лейкоциты, эритроциты могут быть разрушены при кавитации, возникающей в интенсивном звуковом поле. Относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными в очень широком диапазоне частот.
Эти скорости могут характеризовать относительную хрупкость клеток различных видов. Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клетки в постоянном звуковом поле. Изучение этого вопроса показывает, что, пока по крайней мере 1 % популяции остается неразрушенным, можно записать:

dN/dt = - RN, где «N» - концентрация клеток; «t» - время; «R» - постоянная.Разделим в уравнении переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dN}{N} = -Rdt,$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\int Rdt,$$

$$\ln(N) = -Rt + \ln(C),$$

$$\ln(N) - \ln(C) = -Rt$$

$$\ln(\frac{N}{C}) = -Rt, \frac{N}{C} = e^{-Rt}, N = Ce^{-Rt}.$$

При t = 0, N = N0 и C = N0.

Тогда N = N0e-Rt - закон разрушение клеток в постоянном звуковом поле.

5. Составление и решение дифференциальных уравнений в теории эпидемий:

Рассмотрим, как составляются и решаются дифференциальные уравнения в теории эпидемий при условии, что изучаемое заболевание носит длительный характер. При этом процесс передачи инфекции значительно более быстрый, чем течение самой болезни, и зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным особям.

В начальный момент t = 0 «a» - число зараженных, «b» - число незараженных особей, x(t), y(t)— соответственно число зараженных и незараженных особей к моменту времени «t». В любой момент времени «t» для промежутка, меньшего времени жизни одного поколения, имеет место равенство

x + y = a + b.

При этих условиях нужно установить закон изменения числа незараженных особей с течением времени, т. е. найти y = f(t).

Так как инфекция передается при встречах зараженных особей с незараженными, то число незараженных особей будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между зараженными и незараженными особями.

Для промежутка времени «dt» dy= - βxydt, откуда dy/dt = - βxy, где β - коэффициент пропорциональности. Подставив в это уравнение значение x=a+b-y, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

dy/dt = - βy(a + b - y).

После разделения дифференциалов и переменных в последнем уравнении, получим:

$$\frac{dy}{y(a+b-y)} = -\beta dt.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения:

$$\frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a+b-y}\right)dy=-\beta t,$$

$$\int\frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a+b-y}\right)dy=-\int\beta t,$$

Интегрируем:

$$\frac{1}{a+b}\int\frac{dy}{y}+\frac{1}{a+b}\int\frac{dy}{a+b-y}=-\beta t+C,$$

$$\ln(y)-\ln(a+b-y)=-(a+b)\beta t+\ln(C),$$

$$\ln\left(\frac{y}{a+b-y}\right)=\ln\left(e^{-\beta(a+b)t}\right)+\ln(C),$$

$$\frac{y}{a+b-y}=Ce^{-\beta(a+b)t}.$$

При t = 0, y = b – найдем:

$$C=\frac{b}{a},$$

$$\frac{y}{a+b-y}=\frac{b}{a}e^{-\beta(a+b)t}.$$

Разрешая это уравнение относительно «y», получаем: $y(t)=\dfrac{b(a+b)}{b+ae^{\beta(a+b)t}}$

- закон убывания числа незараженных особей с течением времени.

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. II-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқұ құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б.

Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Кощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы :

1. Как определяется скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток?
2. Из каких этапов состоит составление дифференциальных уравнений?

Лекция №6

1. Тема: Основы теории вероятности. Классическое и статистическое определение вероятности

2. Цель: Объяснить студентам теорию основ теории вероятности.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1.Основные понятия теории вероятностей.
2. Классическое и статистическое определение вероятности.
3. Основные теоремы теории вероятностей.

Что изучает теория вероятностей?

Теория вероятностей изучает закономерности массовых явлений, носящих случайный характер.

Массовые явления и процессы характеризуются прежде всего многократным повторением при постоянных условиях некоторых опытов, измерений, операций и т.д.

Что являются основными понятиями теории вероятностей?

Основными понятиями теории вероятностей являются испытания и события.

Испытанием называется осуществление некоторого определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз. Результат или исход испытания называется событием.

Событие обозначается заглавными буквами латинского алфавита: A,B,C

Виды событий:

1. Достоверными называются события, которые происходят неизбежно, в результате каждого испытания
2. Невозможными называются события, которые никогда не происходят.
3. Случайными называются события, которые могут произойти или могут не произойти в данном испытании.

Виды случайных событий:

1. Событие называется несовместимым, если в результате испытания осуществление одного из них исключает осуществление остальных.
2. Событие называется совместимым, если в результате испытания осуществление одного из них не исключает осуществление остальных.

Определение вероятности:

Классической вероятностью P(A) события «A» называется отношение числа «m» элементарных событий,благоприятствующих событию «A», к числу «n» всех элементарных событий. $P(A)=\frac{m}{n}$

Свойства вероятности по классическому определению:

1. Вероятность достоверного события равна единице - P(A)=1.
2. Вероятность невозможного события равна нулю - P(A)=0.
3. Вероятность случайного события равна от нуля до единицы - 0< P(A) <1.

2. Статистическое определение

Если проводится серия из «n» испытаний, проведенных в одних и тех же условиях, требуется определить относительную частоту событий «A» в этой серии испытаний.

Если в серии испытаний событие «A» осуществилось «m» раз, то отношение числа появлений события «A» к общему числу «n» проведенных испытаний данной серии называется относительной частотой события «A» в этой серии испытаний.

$$P^*(A)=\frac{m}{n}=w$$

Если относительная частота колеблется около одного числа, это свидетельствует о том, что относительная частота представляет собой результаты измерений и называется статической вероятностью событий «A».

Основные теоремы теории вероятностей:

1. Сложение вероятностей

Суммой двух несовместимых событий «A» и «B» называется событие C=A+B, заключающееся в наступлении события «A», или события «B», или обоих событий одновременно.

1.1 Вероятность наступления суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

1.2 Вероятность наступления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=\sum_{I=1}^{n}P(A_I)$$

1.3 Сумма вероятностей несовместных событий образующих полную группу событий, равна единице: $P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=\sum_{I=1}^{n}P(A_I)=1$

1.4 Два события называют противоположными, если они несовместны и образуют полную группу.

Сумма вероятностей противоположных событий *равна* единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=p+q=1$$

2.Умножение вероятностей

Произведением двух независимых событий «A» и «B» называют событие C=AB, состоящее в совместном осуществлении этих событий.

2.1. Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий «A» и «B» равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

2.2. Вероятность произведения двух зависимых событий «А» и «В» равна произведению одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие осуществилось:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$$

2.3. Вероятность осуществления хотя бы одного из событий независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий:

$$P(A)=1-q_1\ q_2\ q_3\ldots q_n=1-q^n$$

4. Иллюстративный материал:Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. II-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Кощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы :

1. Чем отличаются несовместные события от совместных?
2. Для каких целей используется теория вероятностей в фармации?

Лекция №7

1. Тема: Повторные независимые испытания
2. Цель: Объяснить студентам понятие повторных независимых испытаний.
План лекции:
1. Повторные независимые испытания.
2. Формула Бернулли.
3. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

3. Тезисы лекции:
Повторные независимые испытания:
При практическом применении теории вероятностей особое значение имеют события, связанные с независимыми повторными испытаниями, для которых:
1. Число испытаний «n» конечно;
2. Каждое испытание имеет только два исхода: а) событие «А» осуществилось;
б) событие «А» не осуществилось;
3. Все испытания независимые;
4. Вероятность появления события «А» в каждом испытании постоянна.
Формула Бернулли -применяется в тех случаях, когда число испытаний «n» и «m»<10, вероятность появления события «А» в каждом испытании (p) постоянна и меньше <1.

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Где Pn(m) – вероятность осуществления события «А» «m» раз в «n» испытаниях.
2. Локальная теорема Муавра-Лапласа - применяется в тех случаях, когда число испытаний «n» и «m»>10, вероятность появления события «А» в каждом испытании (p) постоянна и меньше <1 и осуществляется ровно «m» раз.

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

Где значения φ(x) определяются из специальных таблиц.
3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа-применяется в тех случаях, когда число испытаний «n» и «m»>10, вероятность появления события «А» в каждом испытании (p) постоянна и меньше <1 и осуществляется от «m1» до «m2» раз.

$$P_n(m) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \Phi(-x) = -\Phi(x) \qquad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Где значения Ф(x) определяются из специальных таблиц.
4. Закон Пуассона - применяется в тех случаях, когда число испытаний «n»>10, «m»<10, вероятность появления события «А» в каждом испытании (p) постоянна и меньше < 0,1.

$$P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}, \quad \mu = np$$

Значение функции e-μ определяется из специальных таблиц.
4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. II-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқұ құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Коощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы :

1. Когда применяется формула Бернулли?
2. Для каких целей используется повторные испытания в фармации?

Лекция №8

1. Тема: Случайные величины и их виды. Закон распределения дискретной случайной величины и их числовые характеристики

2. Цель: Объяснить студентам теорию случайных величин и закон распределения дискретной случайной величины.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Понятие случайных величин.
2. Дискретная случайная величина.
3. Закон распределения дискретных случайных величин.
4. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Какие величины называются случайными и чем они отличаются от простых величин?

Величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, называют случайной.

Примерами случайных величин являются: количество рецептов, поступивших в аптеку в течение рабочего дня, количество больных в данном районе, продолжительность человеческой жизни, погрешность при измерении той или иной величины и др.

Случайные величины обозначают прописными (X,Y,Z,…) а их возможные значения – соответствующими строчными буквами латинского алфавита (x,y,z,…). Вероятность случайных величин обозначают буквами с соответствующими индексами: P(x), P(y), P(z),…

Дискретные случайные величины :

1. Дискретной (прерывной) называют случайную величину, принимающую отдельные друг от друга возможные значения с определенными вероятностями, которые можно пронумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным (количество студентов на лекции, кол-во мальчиков, родившихся в различные месяцы из общего числа новорожденных в определенном районе и т.д.).

Закон распределения дискретной случайной величины:

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины задается в виде таблицы:

X_i	x_1	x_2	…	x_n
P_i	p_1	p_2	…	p_n

Сумма вероятностей соответствующих возможных значений всегда равняется единице:

$$p_1 + p_2 + \dots p_n = \sum_{i=1} p_i = 1$$

Все возможные значения случайной величины и их вероятности, указанные в таблице называют рядом распределения.

Числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины «X» называется сумма прозведений всех возможных значений величины «x» на соответствующие вероятности «p» этих значений:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Свойства математического ожидания:

1) $M(C) = C$ Математическое ожидание постоянной величины «C» равно этой постоянной.

2) $M(CX) = CM(X)$ Постоянный множитель «C» выносится за знак математического ожидания без изменений.

3) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$ Математическое ожидание суммы или разности случайных величин равно сумме или разности их математических ожиданий.

4) $M(XY) = M(X)M(Y)$ Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

2. **Дисперсией** дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения возможного значения случайной величины «х» от ее математического ожидания: $D(X) = M((X - M(X))^2)$

Свойства дисперсии:

1) $D(C) = 0$ Дисперсия постоянной величины «С» равна нулю.

2) $D(CX) = C^2 D(X)$ Постоянный множитель «С» выносим за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

3) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ Дисперсия суммы или разности случайных величин равна только сумме их дисперсий этих величин.

4) $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ Упрощенная запись формулы дисперсии определяется из разности мат.ожидания квадрата случайной величины и квадрата мат.ожидания этой величины.

3. **Средним квадратическим отклонением** случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

Пример:

X_i	5	7	8	10	15
P_i	0,1	0,2	0,2	0,35	0,15
X_i^2	25	49	64	100	225

$$M(x) = \mu = 5\cdot 0{,}1 + 7\cdot 0{,}2 + 8\cdot 0{,}2 + 10\cdot 0{,}35 + 15\cdot 0{,}15 = 9{,}25$$

$$M(X^2) = 25\cdot 0{,}1 + 49\cdot 0{,}2 + 64\cdot 0{,}2 + 100\cdot 0{,}35 + 225\cdot 0{,}15 = \\ = 93{,}85$$

$$D(x) = M(X^2) - (M(X))^2 = 93{,}85 - (9{,}25)^2 = 93{,}85 - 85{,}56 = \\ = 8{,}29$$

$$\sigma(x) = \sqrt{8{,}29} \approx 2{,}88$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. ІІ-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет

3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Кощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы:

1. Чем отличается непрерывная случайная величина от дискретной?
2. Для каких целей используются числовые характеристики дискретных случайных величин в фармации?

Лекция №9

1. Тема: Функция распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

2. Цель: Объяснить студентам теорию функции распределения непрерывной случайной величины.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Непрерывная случайная величина.
2. Функция распределения и их свойства
3. Плотность распределения и их свойства.
4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного интервала. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно (погрешность при измерении, температура воздуха в течение дня и т.д.).

Для описания реальных величин, зависящих от случая, класса дискретных случайных величин недостаточно. Таким величинам, как размеры любых физических объектов, температура, давление, длительность тех или иных физических процессов, неестественно приписывать дискретное множество возможных значений. Напротив, естественно считать, что их возможные значения в принципе могут быть любыми числами в некоторых пределах, т. е. они являются непрерывными величинами.

Невозможно описать закон распределения непрерывной случайной величины с помощью таблицы, в которой были бы перечислены все возможные значения этой величины и их вероятности.

Однако различные области возможных значений непрерывной случайной величины все же не являются одинаково вероятными, и для непрерывной случайной величины существует «распределение вероятностей», хотя и не в том смысле, как для дискретной. Для количественной характеристики этого распределения вероятностей удобно пользоваться не вероятностью события «X = x», а вероятностью события «X < x». Под выражением «X < x» понимается событие случайная величина «X» приняла значение, меньшее «x».

Функцией распределения случайной величины:

Функцией распределения случайной величины «X» называется функция F(x), равная вероятности P(X<x) того, что случайная величина приняла значение, меньшее «x»: F(x)= P(x<x). Функцию распределения Ғ(x) иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения..

Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т. е. является одной из форм закона распределения.

Свойства функции распределения:

1. 0 ≤ Ғ(x) ≤ 1 это свойство следует из определения функции распределения как вероятности (0 ≤ P ≤ 1).

2. Ғ(x) - неубывающая функция своего аргумента, т.е. если x1 < x2, то Ғ(x1) < Ғ(x2) илиP(x1 < X < x2) = F(x2) - F(x1).

Вероятность любого события есть число неотрицательное, поэтому P(x1 < X < x2) ≥ 0; значит, Ғ(x2) ≥ Ғ(x1).

3. Если возможные значения случайной величины «X» принадлежат интервалу]a, b[, то: Ғ(x) = 0 при x ≤ a; Ғ(x) = 1 при x ≥ b

Плотностью распределения непрерывной случайной величины:

Плотностью распределения (плотностью вероятности) непрерывной случайной величины «X» называют функцию f (x), равную производной ее интегральной функции распределения: f(x) = F'(x).

Иногда функцию f(x) называют дифференциальной функцией распределения или дифференциальным законом распределения величины «X».

1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина в результате испытания примет какое-нибудь значение из интервала]a, b[, равна определенному интегралу от плотности вероятности в пределах от «a» до «b»: $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин:

1. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины «X», возможные значения которой принадлежат отрезку [a, b], называют величину определенного интеграла: $M(X) = \mu = \int_a^b xf(x)dx,$

f(x) — плотность вероятности.

2. Дисперсией непрерывной случайной величины «X», возможные значения которой принадлежат отрезку [a, b], называют величину определенного интеграла: $D(X) = \sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx,$

где (μ - математическое ожидание; f(x) - плотность вероятности

3. Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

4. Иллюстративный материал:Презентация, слайды.

5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. II-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Кощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы :

1. Какими свойствами обладает функция распределения?
2. Перечислите числовые характеристики непрерывных случайных величин?

Лекция №10

1. Тема: Элементы теории корреляции

2. Цель: Объяснить студентам элементы теории корреляции.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Статистическая, генеральная и выборочная совокупности.

2. Статистическая и корреляционная зависимости.
3. Уравнение линейной регрессии и определение его коэффициентов и параметров.

Множество однородных по качественным и количественным признакам объектов называется статистической совокупностью.

Статическая совокупность, из которой отбирают часть объектов, называют генеральной совокупностью.

Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называют выборкой.

При каких изменениях образуется статистическая зависимость?

Если изменение одной величины влечет за собой изменение распределения (мат.ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения) другой величины, то такую зависимость называют статистической.

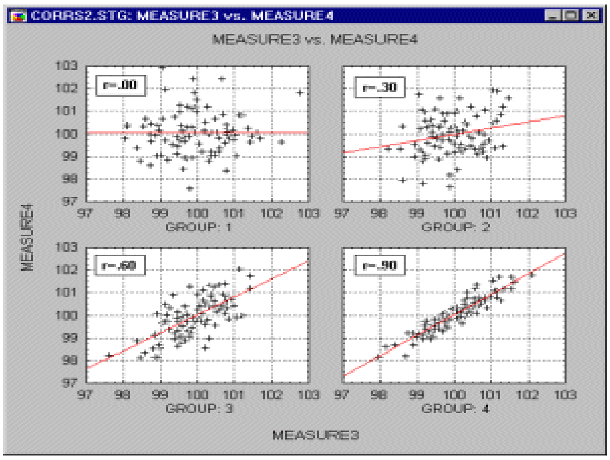
При каких изменениях образуется корреляционная зависимость?

Если изменение одной величины влечет за собой изменение только математического ожидания другой величины, то такой частный случай зависимости называют корреляционной.

Что определяет линейная корреляция?

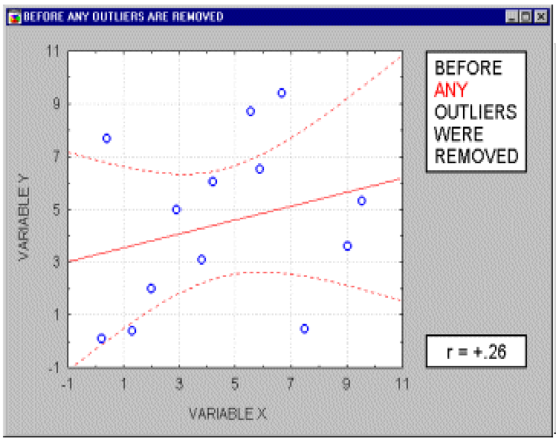
Корреляционная зависимость характеризуется коэффициентом корреляции Пирсона, который называется коэффициентом линейной корреляции.

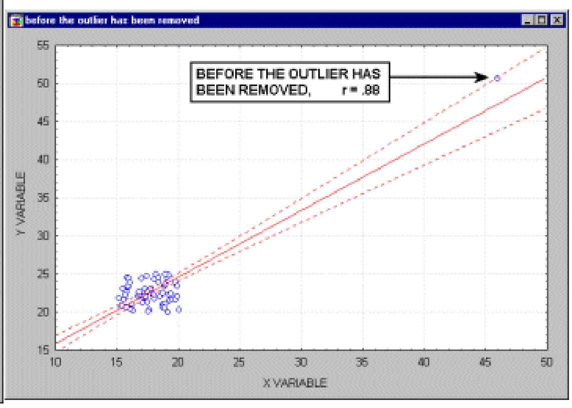
Линейная корреляция определяет степень пропорциональности значений двух переменных друг другу.



На чем основан метод наименьших квадратов?

Прямая, построенная методом наименьших квадратов называется прямой регрессии. Этот метод основан на том, что сумма квадратов расстояний от наблюдаемых точек до прямой является минимальной.





Корреляционная зависимость «Y» от «X» описывается с помощью уравнения вида $M(Y)_x = f(x)$

которое называется уравнением регрессии «Y» на «X».
Где M(Y)x условное мат.ожидание величины «Y», соответствующее данному значению «x», «x» - отдельное значение величины «X», f(x) – некоторая функция.
Корреляционная зависимость «X» от «Y» описывается с помощью уравнения регрессии «X» на «Y»: $M(X)_y = \varphi(y)$

Где M(X)y условное мат.ожидание величины «X», соответствующее данному значению «y», «y» - отдельное значение величины «Y», φ(y) – некоторая функция.
Если функции заданы в виде: f(x)=Ax+B и φ(y)=Cy+D, то уравнение регрессии называется уравнением линейной регрессии и имеет вид:

$$M(y)_x = Ax + B$$

$$M(x)_y = Cy + D$$

$$\bar{y}_{yx} = \rho_{yx}x + b, \;\; \rho_{yx} - коэффициент, \;\; b - параметр$$

$$\bar{x}_{xy} = \rho_{xy}y + d, \;\; \rho_{xy} - коэффициент, \;\; d - параметр$$

Выборочные коэффициенты (ρyx, ρxy) и параметры (b, d) уравнения линейной регрессии определяются с помощью метода наименьших квадратов:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2} \qquad d = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}$$

Для определения коэффициентов и параметров линейной регрессии, заданных следующей зависимостью:

X	5	8	10	12	15	Σ=**50**
Y	7	5	11	15	25	Σ=**63**

необходимо заполнить следующую таблицу.

X	Y	XY	X^2	Y^2
5	7	35	25	49
8	5	40	64	25
10	11	110	100	121
12	15	180	144	225
15	25	375	225	625
Σ= **50**	Σ= **63**	Σ= **740**	Σ= **558**	Σ= **1045**

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.
5. Литература:

- **Основнаяі:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математика-лық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.

4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. ІІ-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
6. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
7. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304
8. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Математика 2. Кощанова Г.Р., оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.– 136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

6. Контрольные вопросы :

1. Чем отличается корреляционная зависимость от статистической?
2. Для какой цели используется корреляционная зависимость в фармации?