

<p>ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ</p>	 <p><b>SKMA</b> -1979-</p>	<p>SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»</p>
<p>Кафедра инженерных дисциплин</p>		<p>76/11 2024-2025 1 стр. из 117</p>

## ЛЕКЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС

**Дисциплина: «Теоретическая механика и сопротивление материалов»**

**Код дисциплины: TMSM 2204**

**Название ОП: 6B07201-Технология фармацевтического  
производства****Объем учебных часов (кредитов): 180 (6 кредитов)**

**Курс и семестр изучения: 2 курс, 3 семестр**

**Объем лекции: 15**

**Шымкент, 2024 г.**

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Лекционный комплекс разработан в соответствии с ОП «Технологии фармацевтического производства» и обсужден на заседании кафедры инженерных Дисциплин.

Протокол № \_\_\_\_ « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024г

Зав.кафедрой, к.техн.н., доцент

Орымбетова Г.Э.

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

## Лекция №1

**1.Тема:** Краткий обзор дисциплины «Теоретическая механика и сопротивление материалов». Основные понятия и определения механики. Аксиомы статики.

Характеристика сил и система сил.

**2. Цель:** Ознакомиться с основными понятиями теоретической механики, освоить теоретический материал.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1. Теоретическая механика и краткий обзор их разделы.
2. Понятие пространства, время и движение. Механическое движение. Абсолютно твердые тела и материальная точка. Выбор системы отсчета.
3. Характеристика сил и система сил. Связи и их реакции. Проекция силы на ось.

*Теоретическая механика* — наука о механическом движении материальных твердых тел и их взаимодействии. Механическое движение понимается как перемещение тела в пространстве и во времени по отношению к другим телам, в частности к Земле.

Для удобства изучения теоретическую механику подразделяют на статику, кинематику и динамику.

*Статика* изучает условия равновесия тел под действием сил.

*Кинематика* рассматривает движение тел как перемещение в пространстве; характеристики тел и причины, вызывающие движение, не рассматриваются.

*Динамика* изучает движение тел под действием сил.

В отличие от физики теоретическая механика изучает законы движения некоторых абстрактных *абсолютно твердых тел*: здесь материалы, форма тел существенного значения не имеют. При движении абсолютно твердое тело не деформируется и не разрушается. В случае, когда размерами тела можно пренебречь, тело заменяют материальной точкой.

Механическое движение - это изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Совокупность тел, которая выделена для рассмотрения, называется механической системой.

Изменение положения любого тела можно указать только по отношению к некоторому другому телу. Для описания движения необходимо так же определять время. Система тел, по отношению к которым рассматривается движение и отсчитывающее время часы называются системой отсчета. Движение тела относительно различных систем отсчета имеет разный характер. В этом смысле движение относительно. Например, скорость и путь человека в движущемся поезде относительно вагона и относительно платформы разные.

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой или частицей (т.е. материальная точка - математическая точка, имеющая массу тела). Материальная точка - простейший объект механики. Очевидно, что материальная точка - это простейшая модель тела, позволяющая упростить математическое описание движения. Другая простая модель тела - абсолютно твердое тело: это тело, деформациями которого в условии данной задачи можно пренебречь. Абсолютно твердое тело можно представить как тело, состоящее из огромного числа (теоретически - из бесконечного числа)

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

материальных точек, взаимное расположение между которыми не меняется при любых условиях.

Сила — векторная физическая величина, являющаяся мерой интенсивности воздействия на данное тело других тел, а также полей.

Сила как векторная величина характеризуется модулем, направлением и «точкой» приложения силы.

Также используется понятие линия действия силы, обозначающее проходящую через точку приложения силы прямую, по которой направлена сила.

Все силы, действующие на систему несвободных точек, можно разделить на активные (вызывающие движение системы) и пассивные (реакции связей). Кроме того, силы делятся на внешние и внутренние.

Внешними называют силы, действующие на движущуюся механическую систему извне и ей не принадлежат ( $\vec{F}_e$ ).

Внутренними силами называют силы взаимодействия между отдельными точками системы ( $\vec{F}_i$ ). Внутренние силы обладают следующими свойствами.

Механические связи и их реакции.

Мех.связью назыв. тело, которое ограничивает изучаемого тела в пространстве.

Реакция связи- сила, с которой мех. связь действует на изучаемое тело.

Классификация связи: в теор.механ. все механ. связи делятся на типы. Тип связи определяется по тому признаку, как направлена реакция этой связи:

а)гладкая поверхность. Направление перпендикулярно касательной к соприкасающимся поверхностям. Реакция этой связи чаще всего называется нормальной реакцией [N].

При опирании на точку реакция перпендикулярна изучаемому телу.

б)шероховатая поверхность. Сила трения всегда перпендикулярна норм.реакции.

Проекция силы на оси.

Проекция силы на ось – это алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между положительным направлением оси и вектором силы (т.е. это отрезок, откладываемый силой на соответствующие оси.Рисунок 1.):

$$F_x = F \cos \alpha;$$

$$P_x = P \cos \beta = P \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$R_x = R \cos \gamma = -R \cdot \cos(180^\circ - \gamma).$$

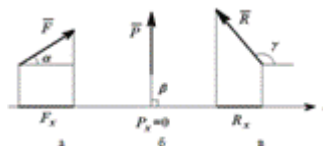


Рис. 1.

Проекция силы на ось может быть положительной, рис. 1.а ( $0 \leq \alpha < \pi/2$ ), равной нулю, рис. 1.б ( $\beta = \pi/2$ ) и отрицательной, рис. 1.в ( $\pi/2 < \gamma \leq \pi$ ).

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казakhstanская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Иногда для нахождения проекции силы на ось сначала нужно найти ее проекцию на плоскость, а потом проекцию на ось (рисунок 2):

$$P_z = P \sin \alpha;$$

$$P_x = (P \cos \alpha) \cos \beta;$$

$$P_y = (P \cos \alpha) \cos \gamma = P \cos \alpha \cdot \cos(90^\circ - \beta).$$

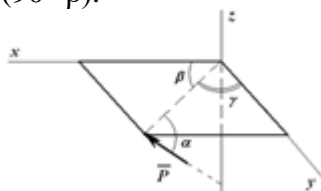


Рис. 2

**4. Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально-техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

#### 5. Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). <https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б. <http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

## 6.Контрольные вопросы

- 1.Что изучает теоретическая механика?
- 2.Что такое механическое движение?
3. Дайте определение абсолютно твердого тела.
- 4.Что изучает статика?
- 5.Что изучает кинематика?
- 6.Что изучает динамика?

## Лекция №2

**1.Тема:** Проецирование плоских и пространственных систем сил. Момент силы относительно точки и оси. Система сходящихся и произвольно расположенных сил. Условия равновесия систем сил.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

- 1.Пара сил и ее действие на тело.
- 2.Моменты сил относительно точки и оси. Сосредоточенные и распределенные нагрузки. Система сходящихся и несходящихся сил.
- 3.Условия равновесия плоских сил. Произвольно расположенная система сил.
- 4.Главный вектор и главный момент системы сил. Условия равновесия

Пара сил, момент пары сил

*Парой сил* называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны.

Рассмотрим систему сил  $(F; F')$ , образующих пару.

Пара сил вызывает вращение тела и ее действие на тело оценивается моментом. Силы, входящие в пару, не уравновешиваются, т. к. они приложены к двум точкам (рис.45). Их действие на тело не может быть заменено одной силой (равнодействующей).

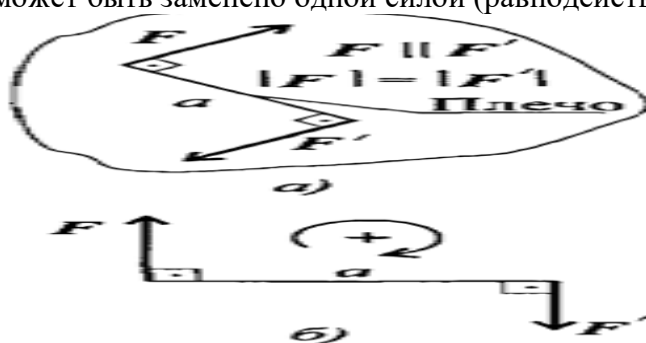


Рисунок 45.

Момент пары сил численно равен произведению модуля силы на расстояние между линиями действия сил (*плечо пары*).

Момент считают положительным, если пара вращает тело по часовой стрелке (рис.45,б):  
 $M(F; F') = Fa$ ;  $M > 0$ .

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары*.

*Свойства пар* (без доказательств):

1. пару сил можно перемещать в плоскости ее действия;
2. эквивалентность пар. Две пары, моменты которых равны, (рис.46) эквивалентны (действие их на тело аналогично).

3. сложение пар сил. Систему пар сил можно заменить равнодействующей парой.

Момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов пар, составляющих систему (рис.47):

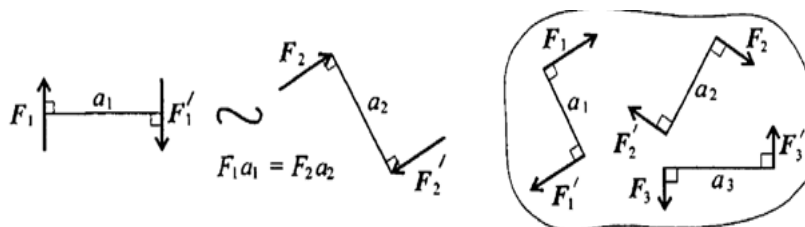


Рисунок 46.

Рисунок 47.

$$M_{\Sigma} = F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + \dots + F_n a_n; \quad M_{\Sigma} = \sum_0^n m_k.$$

4. равновесие пар

Для равновесия пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы равнялась нулю:

$$M_{\Sigma} = 0 \implies \sum m_k = 0.$$

Момент силы относительно точки.

Сила, не проходящая через точку крепления тела, вызывает вращение тела относительно точки, поэтому действие такой силы на тело оценивается моментом.

*Момент силы* относительно точки численно равен произведению модуля силы на расстояние от точки до линий действия силы.

Перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы (рис.48), называется *плечом силы*.

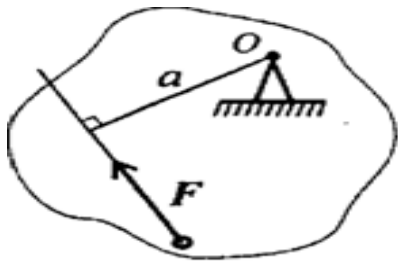


Рисунок 48.

Обозначение момента  $M_o(F)$  или  $m_o(F)$ ;

$$m_o(\mathbf{F}) = Fa.$$

Единица измерения  $[m_o(F)] = \text{Нм}$ .

Момент считается положительным, если сила разворачивает тело по часовой стрелке. Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через точку, т. к. в этом случае расстояние от точки до силы равно нулю.

Силу можно перенести параллельно линии ее действия, при этом нужно добавить пару сил с моментом, равным произведению модуля силы на расстояние, на которое перенесена сила.

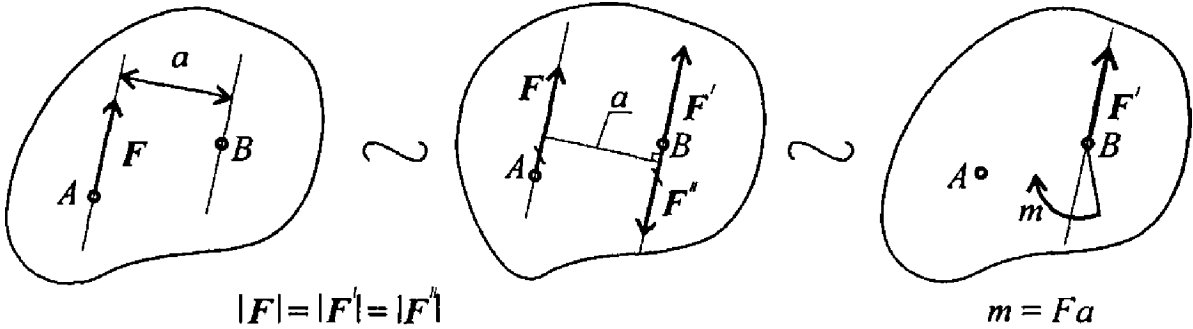


Рисунок 49.

Дано: сила в точке A (рис.49).

Добавим в точке B уравновешенную систему сил ( $F'$ ;  $F''$ ). Образуется пара сил ( $F$ ;  $F''$ ). Получим силу в точке B и момент пары.

Линии действия произвольной системы сил не пересекаются в одной точке, поэтому для оценки состояния тела такую систему следует упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку - точку приведения. Применяют теорему Пуансо. При любом переносе силы в точку, не лежащую на линии ее действия, добавляют пару сил. Появившиеся при переносе пары называют *присоединенными парами*.

Дана плоская система произвольно расположенных сил (рис.50.), Переносим все силы в точку O. Получим пучок сил в точке O, который можно заменить одной силой - *главным вектором системы*. Образующуюся систему пар сил можно заменить одной эквивалентной парой - *главным моментом системы*.



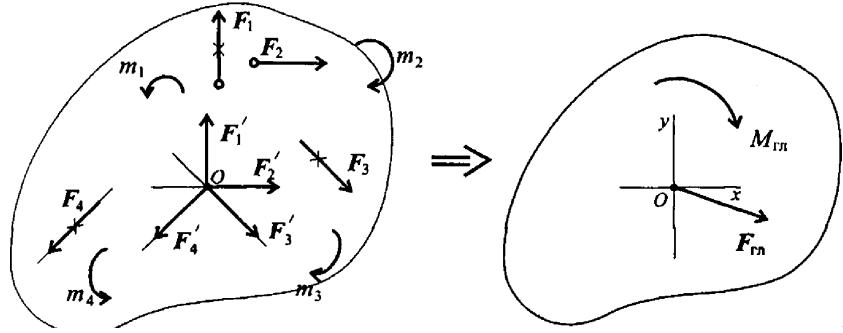


Рисунок 50.

$$\mathbf{F}_{гр} = \sum_0^n \mathbf{F}_k.$$

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной плоской системы сил. Проецируем все силы системы на оси координат и, сложив соответствующие проекции на оси, получим проекции главного вектора.

$$F_{грx} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{грy} = \sum_0^n F_{ky}.$$

По величине проекций главного вектора на оси координат находим модуль главного вектора:

$$F_{гр} = \sqrt{F_{грx}^2 + F_{грy}^2}.$$

Главный момент системы сил равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно точки приведения.

$$M_{грO} = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n;$$

$$M_{грO} = \sum_0^n m_O(\mathbf{F}_k).$$

Таким образом, произвольная плоская система сил приводится к одной силе (главному вектору системы сил) и одному моменту (главному моменту системы сил).

Влияние точки приведения. Точка приведения выбрана произвольно. При изменении положения точки приведения величина главного вектора не изменится.

Величина главного момента при переносе точки приведения изменится, т. к. меняются расстояния от векторов-сил до новой точки приведения.

Спомощью теоремы Вариньона о моменте равнодействующей можно определить точку на плоскости, относительно которой главный момент равен нулю. Тогда произвольная плоская система сил может быть заменена одной силой. Эту силу называют равнодействующей системы сил.

Численно равнодействующая равна главному вектору системы сил, но приложена в другой точке, относительно которой главный момент равен нулю. Равнодействующую принято обозначать  $F_{\Sigma}$

$$F_{\Sigma} = F_{\text{гл}},$$

$$F_{\Sigma} = \sqrt{\left(\sum_0^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_0^n F_{ky}\right)^2}.$$

Точку приложения равнодействующей можно определить по формуле

$$d = \frac{M_{\text{гл}}}{F_{\text{гл}}},$$

Численно ее значение определяется так же, как главный вектор системы сил: где  $d$  - расстояние от выбранной точки приведения до точки приложения равнодействующей;

$M_{\text{гл}}$  - величина главного момента относительно выбранной точки приведения;

$F_{\text{гл}}$  - величина главного вектора системы сил.

Частные случаи приведения системы сил к точке. При приведении системы сил к точке возможны следующие варианты:

1.  $F_{\text{гл}} = 0$   
 $M_{\text{гл}O} \neq 0$   $\Rightarrow$  тело вращается вокруг неподвижной оси.
2.  $M_{\text{гл}O} = 0$   
 $F_{\text{гл}} \neq 0; F_{\text{гл}} = F_{\Sigma}$   $\Rightarrow$  тело движется прямолинейно ускоренно.
3.  $M_{\text{гл}O} = 0$   
 $F_{\text{гл}} = 0$   $\Rightarrow$  тело находится в равновесии.

**Условие равновесия произвольной плоской системы сил**

1. При равновесии главный вектор системы равен нулю ( $F_{\text{гл}} = 0$ ).

Аналитическое определение главного вектора приводит к выводу:

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}x}^2 + F_{\text{гл}y}^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0, \end{cases}$$

где  $F_{kx}$  и  $F_{ky}$  - проекции векторов на оси координат.

2. Поскольку точка приведения выбрана произвольно, ясно, что при равновесии сумма моментов сил системы относительно любой точки на плоскости должна равняться нулю:

$$M_{\text{гл}O} = \sum_0^n m_O(\mathbf{F}_k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0, \end{cases}$$

где  $A$  и  $B$  — разные точки приведения.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил может быть сформулировано следующим образом: для того чтобы твердое тело под действием произвольной плоской

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

системы сил находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равнялась нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки в плоскости действия сил равнялась нулю.

Получим основную форму уравнения равновесия:

$$\left. \begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_C(\mathbf{F}_k) = 0 \end{cases} \right\} \text{уравнения моментов.}$$

Теоретически уравнения моментов можно записать бесконечное множество, но практически доказано, что на плоскости можно составить только три независимых уравнения моментов и при этом три точки (центры моментов) не должны лежать на одной линии.

Таким образом, имеем пять независимых уравнений равновесия.

Практически для решения задач на плоскости достаточно трех уравнений равновесия. В каждом конкретном случае используются уравнения с одним неизвестным.

Для частного случая, если уравновешена система параллельных сил, можно составить только два уравнения равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Ось  $Ox$  системы координат параллельна линии действия сил.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

## 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с  
 Электронные ресурсы:
  1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
  2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
  3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
  4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

### 6.Контрольные вопросы

1. Что такое момент силы относительно точки? Как берется знак момента силы относительно точки? Что называется плечом силы?
2. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
3. Что такое главный вектор и главный момент плоской системы сил?
4. Сформулируйте теорему Вариньона.
5. Сформулируйте аналитическое условие равновесия плоской системы произвольно расположенных сил.
6. Укажите три вида уравнения равновесия плоской системы произвольно расположенных сил.
7. Укажите, как рационально выбрать направления осей координат и центр моментов.
8. Какие нагрузки называются сосредоточенными и распределенными?
9. Что такое интенсивность равномерно распределенной нагрузки?
10. Как найти числовое значение направления и точку приложения равнодействующей равномерно распределенной нагрузки.

### Лекция №3

**1.Тема :**Введение в кинематику. Кинематика материальных точек. Уравнение движения точки и траектории .Скорость и ускорение точки. Виды движения точки.

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

**2. Цель:** Ознакомиться с основными понятиями кинематики, освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1. Элементы и задачи кинематики.
2. Векторный, координатный и естественный способ задания движений точки и определение скорости и ускорения.
3. Движения точки в зависимости от ускорения и траектории.
4. Равномерное и равнопеременное, ускоренное и замедленное движения точки.

В кинематике изучается механическое движение материальных точек и твердых тел без учета причин, вызывающих эти движения. Кинематику часто называют геометрией движения. Механическое движение происходит в пространстве и во времени. Пространство, в котором происходит движение тел, рассматривается как трехмерное, все свойства его подчиняются системе аксиом и теорем евклидовой геометрии. Время полагают ни с чем не связанным и протекающим равномерно. В общем случае различные точки твердого тела совершают разные движения. Поэтому и возникает необходимость изучить в первую очередь движение отдельных точек тела. Чтобы определить положение точки в пространстве, нужно иметь какое-то неподвижное тело или связанную с ним систему координатных осей, которую называют *системой отсчета*. Движение заданного тела или точки обнаруживается только путем сравнения с системой отсчета.

Основные кинематические параметры.

**Траектория**

Линию, которую очерчивает материальная точка при движении в пространстве, называют *траекторией*.

Траектория может быть прямой и кривой, плоской и пространственной линией.

Уравнение траектории при плоском движении:  $y = f(x)$ .

**Пройденный путь**

Путь измеряется вдоль траектории в направлении движения.

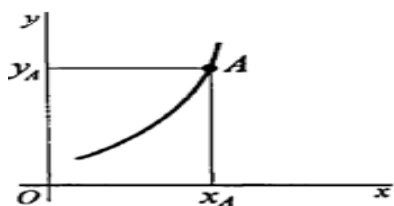
Обозначение  $S$ , единицы измерения - метры.

**Уравнение движения точки**

Уравнение, определяющее положение движущейся точки в зависимости от времени, называется *уравнением движения*.

Положение точки в каждый момент времени можно определить по расстоянию, пройденному вдоль траектории от некоторой неподвижной точки, рассматриваемой как начало отсчета. Такой способ задания движения называется *естественным*.

Таким образом, уравнение движения можно представить в виде  $S=f(t)$ . Положение точки можно также определить, если известны ее координаты в зависимости от времени (рис. 1.). Тогда в случае движения на плоскости должны быть заданы два уравнения:



$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t). \end{cases}$$

Рисунок 1.

В случае пространственного движения добавляется и третья координата

$$z = f_3(t)$$

Такой способ задания движения называют *координатным*.

### Скорость движения

Векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения по траектории, называется *скоростью*.

*Скорость* - вектор, в любой момент направленный по касательной к траектории

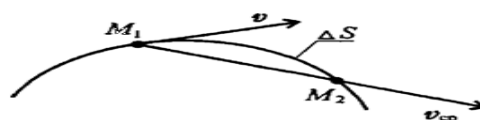


Рисунок 2.

в сторону направления движения (рис.2.).

Если точка за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то движение называют *равномерным*.

Средняя скорость на пути  $\Delta S$  определяется как

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где  $\Delta S$  - пройденный путь за время  $\Delta t$ ;  $\Delta t$  - промежуток времени.

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то движение называют *неравномерным*.

В этом случае скорость - величина переменная и зависит от времени  $v = f(t)$ .

При рассмотрении малых промежутков времени ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) средняя скорость становится равной истинной скорости движения в данный момент. Поэтому скорость в данный момент определяют как производную пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

За единицу скорости принимают 1 м/с. Иногда скорость измеряют в км/ч,

$$1 \text{ км/ч} = \frac{1000}{3600} = 0,278 \text{ м/с}.$$

### Ускорение точки

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению, называется *ускорением точки*.

Среднее значение ускорения за этот промежуток времени

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени среднее ускорение превратится в ускорение в данный момент:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Обычно для удобства рассматривают две взаимно перпендикулярные составляющие ускорения: нормальное и касательное.

Нормальное ускорение  $a_n$  характеризует изменение скорости по направлению и определяется как

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где  $r$  - радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение  $a_t$  характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории; при ускорении его направление *совпадает* с направлением скорости, а при замедлении оно направлено *противоположно* направлению вектора скорости.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v' = S''.$$

Формула для определения касательного ускорения имеет вид:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания движения точки.

Быстроту изменения положения точки во времени характеризует векторная величина  $V$ , называемая скоростью точки. Пусть движущаяся точка в момент времени  $t$  находится в положении  $M$ , определяемом радиусом-вектором  $r$ , а в момент  $t + \Delta t$  приходит в положение  $M_1$ , определяемое радиусом-вектором  $r_1$  (рис. 3.1, а). Перемещение точки за промежуток времени  $\Delta t$  определяется вектором перемещения точки  $\Delta r = r_1 - r$ . Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую средней по модулю и направлению скоростью точки за промежуток времени  $\Delta t$ .

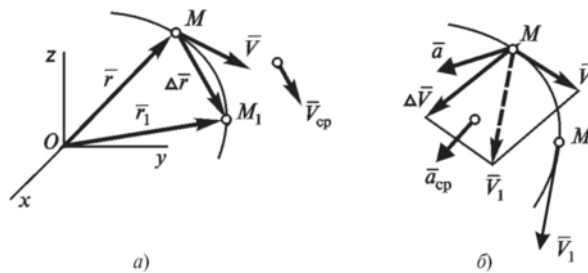


Рис. 3.1

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$$\bar{V}_{cp} = \Delta \bar{r} / \Delta t.$$

Направлен вектор  $V_{cp}$  так же, как и вектор  $A$ ; вектор  $V_{cp}$  непрiloжен к какой-либо точке, он является характеристикой движения точки на участке траектории. Скоростью точки в данный момент времени  $t$  называется векторная величина  $V$ , к которой стремится средняя скорость  $V_{cp}$  при стремлении промежутка времени  $\Delta t$  к нулю:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\bar{V}_{cp}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \bar{r} / \Delta t), \text{ т.е. } \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \text{ или } \bar{V} = \dot{\bar{r}}.$$

*Точка над обозначением величины есть символ дифференцирования ее по времени.*

Таким образом, скорость точки равна первой производной от радиуса-вектора точки по времени.

Размерность скорости  $L/T$ , т. е. длина/время; в качестве единиц измерения применяют обычно м/с, км/ч.

При естественном способе задания движения точки задаются ее траектория и закон движения вдоль этой траектории в виде  $s = J(t)$ .

Величины  $V$  и  $a$  определяют по их проекциям не на оси какой-нибудь неподвижной системы отсчета  $Oxyz$ , а на оси подвижной прямоугольной системы координат  $Mxnb$ , имеющей начало в точке  $M$  и движущейся вместе с нею по траектории (рис. 3.1). Эти оси называются осями естественного трехгранника. Ось  $Mx$  (касательная) направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета координаты  $s$ . Плоскость, проведенную через точку  $M$  перпендикулярно касательной, называют *нормальной плоскостью*. В этой плоскости расположены две оси. По линии пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей в сторону вогнутости траектории (к центру кривизны траектории) направлена ось  $Mn$  (главная нормаль). Ось  $Mb$  (бинормаль) — перпендикулярна первым двум осям и направлена так, чтобы образовать с ними правую систему осей  $Mxnb$ .

Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения.

Проекция скорости точки на координатные оси равна первым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Модуль скорости и косинусы углов, которые вектор  $V$  образует с осями  $x, y, z$ , найдем по формулам:

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\cos(\bar{V}, \hat{i}) = V_x/V, \quad \cos(\bar{V}, \hat{j}) = V_y/V, \quad \cos(\bar{V}, \hat{k}) = V_z/V.$$

Для определения ускорения  $a$ , согласно формуле, следует продифференцировать по времени выражения, получим

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}.$$

### Равномерное движение

*Равномерное движение* - это движение с постоянной скоростью:

$$v = \text{const.}$$

Для прямолинейного равномерного движения (рис.3,а)



$$a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = 0;$$

$$r = \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} = 0.$$

Полное ускорение движения точки равно нулю:  $a = 0$ .

При криволинейном равномерном движении

$$r \neq \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0.$$

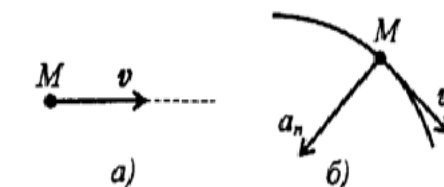


Рис 3а.

Полное ускорение равно нормальному ускорению:  $a = a_n$ .

Уравнение (закон) движения точки при равномерном движении можно получить, проделав ряд несложных операций.

Так как  $v = \text{const}$ , закон равномерного движения в общем виде является уравнением прямой:  $S = S_0 + vt$ , где  $S_0$  - путь, пройденный до начала отсчета.

#### Равнопеременное движение

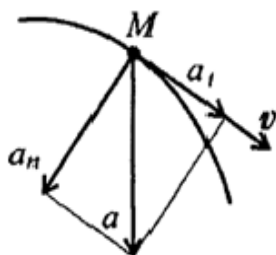
*Равнопеременное движение* это движение с постоянным касательным ускорением:

$$a_t = \text{const}.$$

Для прямолинейного равнопеременного движения

$$r = \infty \Rightarrow a_n = 0; \quad a = a_t = \text{const}$$

Полное ускорение равно касательному ускорению. Криволинейное равнопеременное движение (рис.4):



$$a_n \neq 0; \quad a_t = \text{const} \neq 0.$$

Учитывая, что  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ;  $a_t = \text{const}$  и сделав ряд преобразований:

$$dv = a_t dt; \quad \int_v dv = a_t \int_t dt,$$

Рис. 4.

получим значение скорости при равнопеременном движении

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

$$v = v_0 + a_t t; \quad v = \frac{dS}{dt}.$$

После интегрирования будем иметь закон равнопеременной движения в общем виде, представляющий уравнение параболы:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2},$$

где  $v_0$  — начальная скорость движения;

$S_0$  — путь, пройденный до начала отсчета;

$a_t$  — постоянное касательное ускорение.

### Неравномерное движение

При *неравномерном движении* численные значения скорости и ускорения меняются.

Уравнение неравномерного движения в общем виде представляет собой уравнение третьей  $S = f(t^3)$  и выше степени.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально-техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

### 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б. <http://rmebrk.kz/>

5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

### 6.Контрольные вопросы

1. Запишите в общем виде закон движения в естественной и координатной форме.
2. Что называют траекторией движения?
3. Как определяется скорость движения точки при естественном способе задания движения?
4. Запишите формулу ускорения при прямолинейном движении.
5. Запишите формулу ускорения (полного) при криволинейном движении.
6. Запишите уравнение равномерного поступательного движения твердого тела.
7. Запишите уравнение равнопеременного поступательного движения твердого тела?
8. Запишите уравнения равномерного и равнопеременного вращательного движений твердого тела.
9. Задано уравнение движения тела  $S = f(t)$ . Как определяют скорость и ускорение?

### Лекция № 4

**1.Тема:** Кинематика твердого тела. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Уравнение вращательного движения. Угловая скорость и ускорение вращательного движения. Скорость и ускорение точек вращающегося по окружности.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1. Касательное нормальное ускорение.
2. Аналитическое выражение линейной скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
3. Связь между линейными и угловыми соотношениями.
4. Равномерное и равнопеременное вращение. Направление и величина полного ускорения.

Касательное ускорение точки равно первой производной от модуля скорости или второй производной от расстояния по времени. Касательное ускорение обозначается  $\vec{a}^T$  :

$$\vec{a}^{\tau} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \cdot \vec{i}$$

Касательное ускорение в данной точке направлено по касательной к траектории движения точки; если движение ускоренное, то направление вектора касательного ускорения совпадает с направлением вектора скорости; если движение замедленное – то направление вектора касательного ускорения противоположно направлению вектора скорости. (рис. 8.5.)

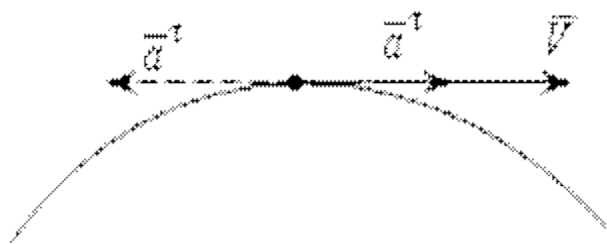


Рис. 4.1

**Нормальным ускорением** точки называется величина, равная квадрату скорости, деленному на радиус кривизны.

Вектор нормального ускорения направлен от данной точки к центру кривизны, (рис.8.6.).

Нормальное ускорение обозначается.  $\vec{a}^n$

n– нормаль к данной точке на траектории движения.

$$\vec{a}^n = \frac{v^2}{R} \vec{i}$$

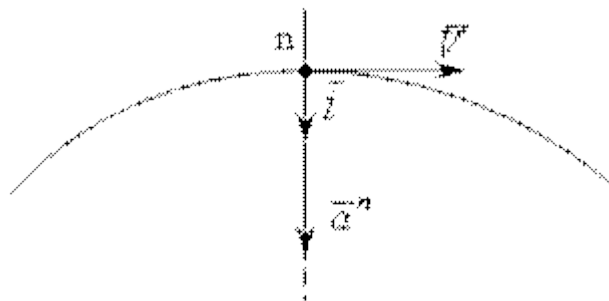


Рис. 4.2

Полное ускорение точки определяется из векторного уравнения:

$$\vec{a} = \vec{a}^t + \vec{a}^n$$

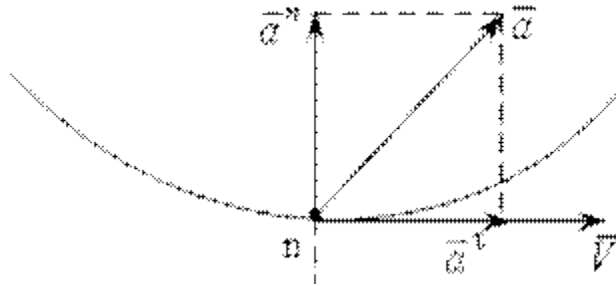


Рис. 4.3

Аналитическое выражение линейной скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Точки тела, вращающегося вокруг оси, перемещаются по окружностям (рис. 30, а), радиусы которых  $r$  равны расстояниям точек от оси вращения.

Линейная скорость  $V$  точки  $A$  и угловая скорость  $\omega$  тела связаны между собою линейной зависимостью

$$V_A = \omega r.$$

Подставив в формулу для линейной скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, значение  $n$  угловой скорости в оборотах в минуту, получим

$$V_A = \frac{\pi}{30} n r.$$

Направлена  $\vec{V}_A$  по перпендикуляру к радиусу  $r$  в сторону  $\omega$  (рис.4.4, а).

В общем случае вектор скорости точки  $A$ , вращаясь вокруг точки  $O$ , изменяется по величине и направлению. Поэтому у этой точки будет иметь место нормальное

ускорение  $\vec{a}_A^n$  (характеризует изменение  $\vec{V}_A$  по направлению) и тангенциальное

ускорение  $\vec{a}_A^t$  (характеризует изменение  $\vec{V}_A$  по величине). Величина нормального

ускорения  $\vec{a}_A^n$  точки  $A$  определится как

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r}.$$

Подставляя в это выражение значение скорости  $V_A = \omega r$ , получаем

$$a_A^n = \omega^2 r.$$

Направлено  $\vec{a}_A^n$  по радиусу  $r$  к центру  $O$  вращения.

Касательное ускорение точки определяется из выражения

$$a_A^t = \varepsilon r,$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение вращающегося тела.

Направлено  $\vec{a}_A^s$  перпендикулярно  $r$  в сторону  $\epsilon$ .

Полное ускорение точки при неравномерном вращении вокруг оси (рис. 4.4, б) геометрически складывается из касательного и нормального ускорений

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^s.$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega.$$

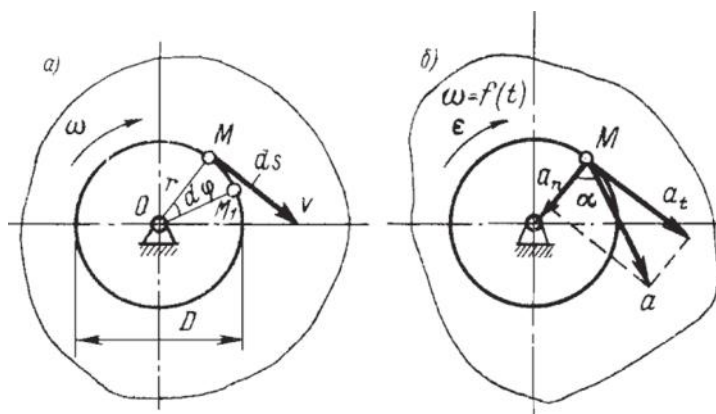


Рис.4.4. Скорости и ускорения точки вращающегося тела.

Связь между линейными и угловыми соотношениями.

Модуль вектора перемещения  $\Delta \vec{r}$  и изменение угла поворота  $\Delta \varphi$  связаны соотношением:

$$|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}| \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{\Delta \varphi}{2} = |\vec{\rho}| \cdot \sin \frac{\Delta \varphi}{2},$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки  $A$ ,  $\vec{\rho}$  - ее радиус вращения. Вектор линейной скорости  $\vec{V}$  и вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  связаны векторным равенством:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \text{ В скалярном виде справедливо равенство:}$$

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \theta = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{\rho}|.$$

Для вектора полного ускорения  $\vec{a}$  имеем следующее векторное равенство:

$$\vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

где  $\vec{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$  - вектор тангенциального ускорения,  $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]$  - вектор нормального ускорения.

Проекции вектора  $\vec{a}$  на орты  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  равны:

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$$\vec{a}_\tau = \varepsilon_z \cdot \rho, \quad \vec{a}_n = \omega^2 \cdot \rho$$

Модуль полного ускорения равен:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \rho \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Равномерное и равнопеременное вращение. Направление и величина полного ускорения.

**Равномерное вращение** - вращение тела с постоянной угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ .

$\varphi = \varphi_0 + \omega t$  - уравнение равномерного вращения тела.

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}$$

Из уравнения находим  $\omega$ , то есть **угловая скорость равномерного вращения** тела равна отношению приращения угла поворота за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка времени.

**Равнопеременное вращение** - вращение тела при котором угловое ускорение постоянно ( $\varepsilon = \text{const}$ ) во все время движения.

Закон равнопеременного вращения, если при  $t=0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\omega = \omega_0$ .

соответствующих:  $\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$ , или

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Полное ускорение при криволинейном движении складывается из тангенциального и нормального ускорений по правилу сложения векторов и определяется формулой

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$$

или

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Направление полного ускорения также определяется правилом сложения векторов:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально-техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

## 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с

2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг

2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>

3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>

4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>

5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

### 6.Контрольные вопросы

1.Запишите формулы для определения касательного, нормального и полного ускорений.  
2.Что характеризует касательное ускорение и как оно направлено по отношению к вектору скорости?

3.Что характеризует и как направлено нормальное ускорение?

4. Каким соотношением связаны между собой линейная и угловая скорость точки?

5.Каким соотношением связаны между собой угловое ускорение точки с ее тангенциальным ускорением?

6.Каким соотношением связаны между собой угловая скорость точки с ее нормальным ускорением?

7.Как определяется полное ускорение?

### Лекция №5

**1.Тема:** Вращение тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и ускорение при вращательном движении. Скорости и ускорения точек тел , вращающихся по окружности. Величина и направление полного ускорения. Равномерное и неравномерное вращательное движение

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**



ОҢТҰСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

1. Простые и сложные движения тела.
2. Уравнение поступательного, вращательного, плоскопараллельного движений тела..
3. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное.
4. Ускорение Кориолиса. Понятие о мгновенном центре скорости и ускорения.

Простыми движениями считают поступательное и вращательное. *Сложным движением* считают движение, которое можно разложить на несколько простых.

Для рассмотрения сложного движения точки выбирают две системы отсчета: подвижную и неподвижную.

Движение точки (тела) относительно *неподвижной* системы отсчета называют *сложным*, или *абсолютным*.

Подвижную систему отсчета обычно связывают с движущимся телом.

Движение *подвижной* системы отсчета относительно неподвижной называют *переносным*.

Движение материальной точки (тела) по отношению к подвижной системе называют *относительным*.

Примером может служить движение человека по эскалатору метро. Движение эскалатора - переносное движение, движение человека вниз или вверх по эскалатору - относительное, а движение по отношению к неподвижным стенам станции - сложное (абсолютное) движение.

При решении задач используют теорему о сложении скоростей: при сложном движении точки абсолютная скорость в каждый момент времени равна геометрической сумме переносной ( $v_e$ ) и относительной ( $v_r$ ) скоростей:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos \alpha},$$

$\alpha$  — угол между векторами  $v_e$  и  $v_r$ .

#### Плоскопараллельное движение твердого тела

*Плоскопараллельным*, или *плоским*, называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной в рассматриваемой системе отсчета плоскости.

Плоскопараллельное движение можно изучать, рассматривая любое плоское сечение тела, параллельное неподвижной плоскости, называемой *основной* (рис.5.1).

Все точки тела, расположенные на прямой, перпендикулярной к основной плоскости, движутся одинаково.

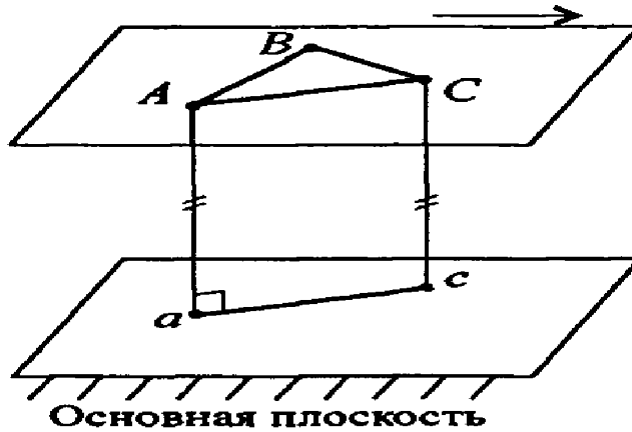


Рис.5.1

Плоскопараллельное движение изучается двумя методами: методом разложения сложного движения на поступательное и вращательное и методом мгновенных центров скоростей.

**Метод разложения сложного движения на поступательное и вращательное**

Плоскопараллельное движение раскладывают на два движения: *поступательное* вместе с некоторым полюсом и *вращательное* относительно этого полюса.

Разложение используют для определения скорости любой точки тела, применяя теорему о сложении скоростей (рис. 5.2).

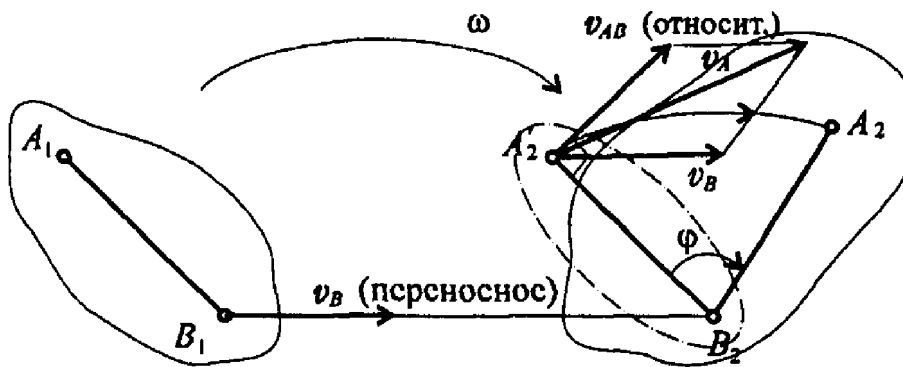
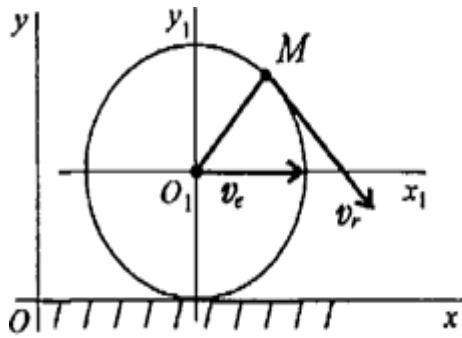


Рис.5.2

Точка  $A$  движется вместе с точкой  $B$ , а затем поворачивается вокруг  $B$  с угловой скоростью  $\omega$ , тогда абсолютная скорость точка  $A$  будет равна

Примером плоскопараллельного движения может быть движение колеса на прямолинейном участке дороги (рис.5.3).

Скорость точки  $M$



$$v_M = v_e + v_r,$$

$v_e$  — скорость центра колеса переносная  
 $v_r$  — скорость вокруг центра относи-  
 тельная.

$yOx$  — неподвижная система координат  
 $y_1O_1x_1$  — подвижная система коорди-  
 нат, связанная с осью колеса.

Рис.5.3

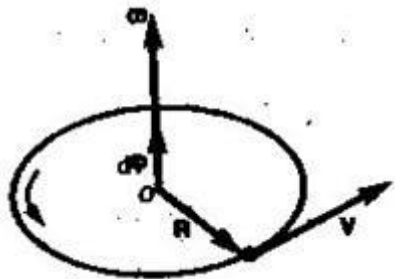
Угловая скорость и угловое ускорение тела. Рассмотрим движение материальной точки по окружности радиуса  $R$ . За время  $\Delta t$  ее положение изменится на угол  $\Delta\phi$ . Углы поворота рассматриваются как векторы. Модуль вектора  $\vec{\phi}$  равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, то есть подчиняется правилу правого винта. Угловой скоростью принято называть векторная величина, равная первой производной угла поворота по времени

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

Она направлена по оси вращения по правилу правого винта. Ее размерность  $[w] = c^{-1}$ , а единица — рад/сек. Линейная скорость точки равна

$$R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = R\omega$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\phi}{\Delta t} =$$



В случае если  $\omega = const$ , то вращение равномерное и его можно охарактеризовать периодом обращения  $T$  (время за которое точка совершает полный оборот, то есть поворачивается на  $2\pi$ ),  $\Delta t = T$  соответствует  $\Delta\phi = 2\pi$ . Таким

образом,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , откуда  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

*Ускорение Кориолиса (Кориолисово ускорение)* характеризует изменение относительной скорости по направлению за счет переносного вращения и изменение величины переносной скорости за счет относительного движения.

Согласно *теореме Кориолиса*, абсолютное ускорение точки в сложном движении определяется как геометрическая сумма относительного, переносного и кориолисова ускорений (рис. 5.3)

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

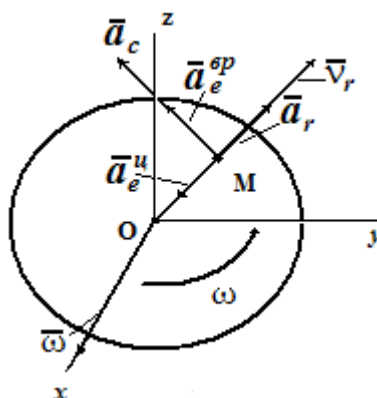


Рис. 5.3

Поскольку, в данном случае, относительное движение происходит по прямой линии, относительное ускорение  $\mathbf{a}_r$  направлено вдоль этой прямой и определяется выражением

$$\mathbf{a}_r = \frac{d^2 OM}{dt^2}$$

Переносным ускорением точки  $M$  является ускорение точки  $M$  диска. Диск совершает вращательное движение, следовательно, переносное ускорение определяется выражением

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_e^{sp} + \mathbf{a}_e^{uc}$$

где  $\mathbf{a}_e^{sp} = \varepsilon \cdot OM$  — вращательное ускорение точки  $M$ , направленное перпендикулярно отрезку  $OM$ ;

$\mathbf{a}_e^{uc} = \omega^2 \cdot OM$  — центростремительное ускорение точки  $M$ , направленное к центру диска.

*Ускорение Кориолиса* или поворотное ускорение определяется по формуле

$$\mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$$

где  $\boldsymbol{\omega}_e$  — переносная угловая скорость,  $\mathbf{v}_r$  — относительная скорость точки.

Направление ускорения Кориолиса определяется по правилу векторного произведения или по правилу Жуковского.

Величина ускорения Кориолиса определяется выражением

$$a_C = 2 \omega_e v_r \sin \alpha$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\omega_e$  и  $v_r$ .

Рассмотрим, какой физический смысл заложен в ускорение Кориолиса. Для простоты будем считать, что диск вращается с постоянной угловой скоростью, а точка  $M$  движется относительно диска с постоянной относительной скоростью (рис.5.4).

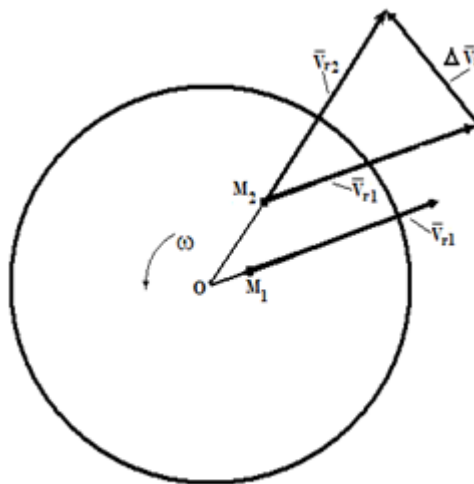


Рис. 5.4

Пусть в момент времени  $t_1$  точка  $M$  занимала положение  $M_1$  и имела относительную скорость  $v_{r1}$ . За промежуток времени  $\Delta t$  точка  $M$  переместится в положение  $M_2$ , при этом направление скорости  $v_r$  изменится вследствие вращения диска. Вектор  $v_r$  получит приращение  $\Delta v_r$ . Отношение  $\Delta v_r / \Delta t$  определяет среднее ускорение точки за промежуток времени  $\Delta t$ . Предел отношения  $\Delta v_r / \Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  есть производная  $dv_r / dt$ , как производная от вектора постоянного по величине.

Рассмотрим, как изменяется переносная скорость в зависимости от относительного движения. В моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  переносная скорость определяется выражениями  $v_{e1} = \omega \times OM_1$  и  $v_{e2} = \omega \times OM_2$ . Тогда приращение вектора  $v_e$  за счет относительного движения будет равно

$$\begin{aligned} \Delta v_e &= \omega \times OM_2 - \omega \times OM_1 = \\ &= \omega \times (OM_2 - OM_1) = \omega \times v_r \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Отношение  $\Delta v_e / \Delta t$  в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  дает производную  $dv_e / dt = \omega \times v_r$ .

Таким образом, ускорение Кориолиса с одной стороны характеризует изменение относительной скорости по направлению за счет переносного вращения и, с другой стороны, изменение величины переносной скорости за счет относительного движения.

#### **Метод определения мгновенного центра скоростей**

*Скорость любой точки тела можно определять с помощью мгновенного центра скоростей.* При этом сложное движение представляют в виде цепи вращений вокруг разных центров.

Задача сводится к определению положения мгновенного центра вращений (скоростей) (рис.55).

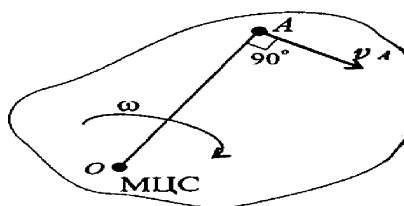


Рис.5.5

Мгновенным центром скоростей (МЦС) является точка на плоскости, абсолютная скорость которой в данный момент равна нулю.

Вокруг этой точки тело совершает поворот со скоростью  $\omega$ .

Скорость точки  $A$  в данный момент равна

$$v_A = \omega OA,$$

т. к.  $v_A$  - линейная скорость точки  $A$ , вращающейся вокруг МЦС.

Существуют три способа определения положения мгновенного центра скоростей:

*Первый способ.* Известна скорость одной точки тела  $v_A$  и угловая скорость вращения тела  $\omega$  (рис.5.5).

Точку  $O$  находим на перпендикуляре к вектору скорости  $v_A$ .

$$AO = \frac{v_A}{\omega}.$$

Соединяем точку  $O$  с точкой  $B$ , измеряем расстояние  $OB$ .  $v_B \perp OB$ ,  $v_B = \omega OB$ .

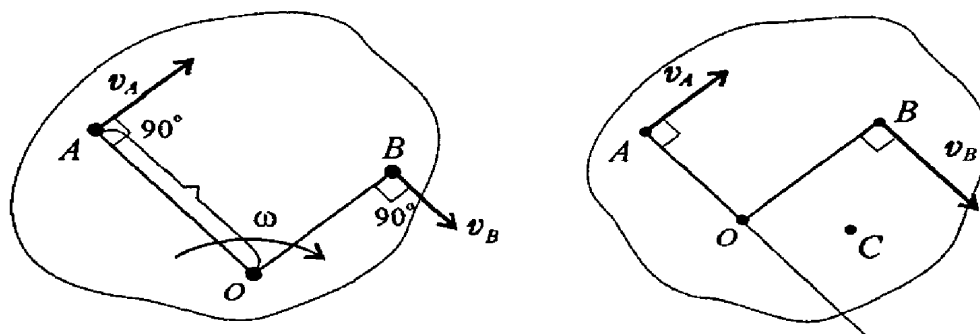


Рис.5.6

Соединяем концы векторов, МЦС находится на пересечении линии, соединяющей концы векторов с линией  $AB$  (рис.5.6). При поступательном движении тела МЦС отсутствует.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

## 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с

2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусеитов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг

2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>

3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>

4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>

5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

### **6.Контрольные вопросы**

- 1.Какое движение называют простыми?
- 2.Какие движения твердого тела называют сложным?
- 3.Какие системы координат выбирают при определении скоростей твердых тел при сложном движении?
- 4.Какое движение считают переносным, а какое относительным?
- 5.Сформулируйте теорему сложения скоростей?
- 6.Какое движение называют плоским?
- 7.Какие способы применяют для определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении?
- 8.Что такое мгновенный центр скоростей, как его определяют и для чего используют?

## **Лекция № 6**

**1.Тема:** Динамика. Основные положения динамики.Динамика материальной точки. Основные законы и теоремы динамики.Дифференциальные уравнения движения точки. Теория трения, Виды трения. Принцип Даламбера.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

### План лекции:

1. Основные законы и дифференциальные уравнения динамики.
2. Сила инерции. Работа силы на прямолинейном и криволинейном перемещении.
3. Работа силы тяжести и силы трения.
4. Мощность силы и КПД. Работа и мощность при вращательном движении.

*Динамика* - раздел теоретической механики, в котором устанавливается связь между движением тел и действующими на них силами.

В динамике решают два типа задач:

- определяют параметры движения по заданным силам;
- определяют силы, действующие на тело, по заданным кинематическим параметрам движения.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому тело можно принять за материальную точку.

Если размеры тела малы по сравнению с траекторией, его тоже можно рассматривать как материальную точку, при этом точка совпадает с центром тяжести тела.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Поэтому динамику делят на динамику точки и динамику материальной системы.

Ускорение материальной точки массы  $m$ , движущейся под действием приложенных к ней сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , определяется с помощью основного закона динамики (второго закона Ньютона) в сочетании с законом независимости действия сил:  $\mathbf{ma} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$ .

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси неподвижных декартовых координат имеют вид

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Где  $x'', y'', z''$  - проекции ускорения  $\mathbf{a}$ , а  $F_{ix}; F_{iy}; F_{iz}$  — проекции силы  $\mathbf{F}$  на соответствующие оси декартовых координат.

Дифференциальные уравнения плоского движения материальной точки в полярных

координатах имеют вид  $m(\mathbf{r}'' - r\dot{\phi}^2) = \sum_{i=1}^n F_{i\rho}, \quad \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) = \sum_{i=1}^n F_{i\phi}$

здесь  $r$  — радиус-вектор точки,  $\phi$  — полярный угол.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки записываются соответственно выбранной системе координат. Так, дифференциальные уравнения можно составить в цилиндрических, сферических и других криволинейных координатах.

С помощью дифференциальных уравнений движения материальной точки можно решать две основные задачи динамики: прямую и обратную. **Прямой** называется задача, в которой по заданным движению и массе материальной точки определяется равнодействующая сил, приложенных к этой точке. **Обратной** называется задача, в которой по заданным силам и массе материальной точки определяется ее движение.

### Аксиомы динамики



ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

Законы динамики обобщают результаты многочисленных опытов и наблюдений. Законы динамики, которые принято рассматривать как аксиомы, были сформулированы Ньютоном, но первый и четвертый законы были известны Галилею. Механику, основанную на этих законах, называют классической механикой.

**Первая аксиома** (принцип инерции)

Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

Это состояние называют состоянием инерции. Вывести точку из этого состояния, т.е. сообщить ей некоторое ускорение, может внешняя сила.

Всякое тело (точка) обладает *инертностью*. Мерой инертности является масса тела.

*Массой* называют количество вещества в объеме тела, в классической механике ее считают величиной постоянной. Единица измерения массы — килограмм (кг).

**Вторая аксиома** (второй закон Ньютона - основной закон динамики)

Зависимость между силой, действующей на материальную точку, и сообщаемым ею ускорением следующая:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

где  $m$  — масса точки, кг;  $\mathbf{a}$  — ускорение точки, м/с<sup>2</sup>.

Ускорение, сообщенное материальной точке силой, пропорционально величине силы и совпадает с направлением силы.

Основной закон динамики в дифференциальной форме:

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2}, \quad \text{т.к.} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

На все тела на Земле действует сила тяжести, она сообщает телу ускорение свободного падения, направленное к центру Земли:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g},$$

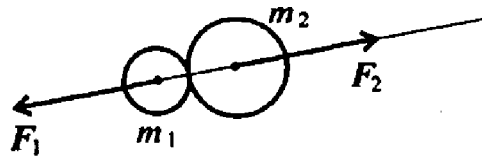
где  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>, ускорение свободного падения.

**Третья аксиома**(третий закон Ньютона)

Силы взаимодействия двух тел равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны(рис.61):

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2; \quad \mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1; \quad \mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2.$$

Откуда



$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Рисунок 61.

При взаимодействии ускорения обратно пропорциональны массам.

**Четвертая аксиома (закон независимости действия сил)**

Каждая сила системы сил действует так, как она действовала бы одна.

Ускорение, сообщаемое точке системой сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщенных точке каждой силой в отдельности (рис. 62):

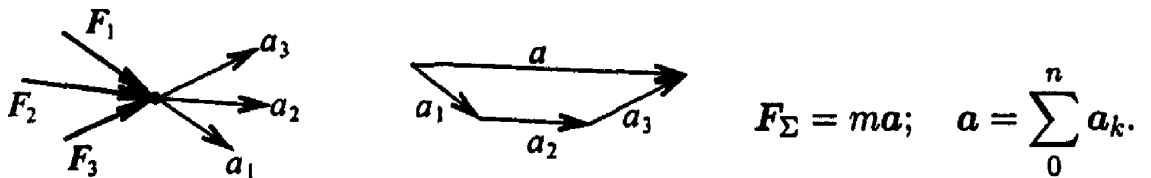


Рисунок 62.

**Понятие о трении. Виды трения**

*Трение* - сопротивление, возникающее при движении одного шероховатого тела по поверхности другого. При скольжении тел возникает трение скольжения, при качении - трение качения. Природа сопротивлений движению в разных случаях различна.

**Трение скольжения**

Причина - механическое зацепление выступов. Сила сопротивления движению при скольжении называется *силой трения скольжения* (рис. 63,а).

Законы трения скольжения:

1. Сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{\text{тр}} = F_f = fR,$$

где  $R$  - сила нормального давления, направлена перпендикулярно опорной поверхности;  $f$  - коэффициент трения скольжения.

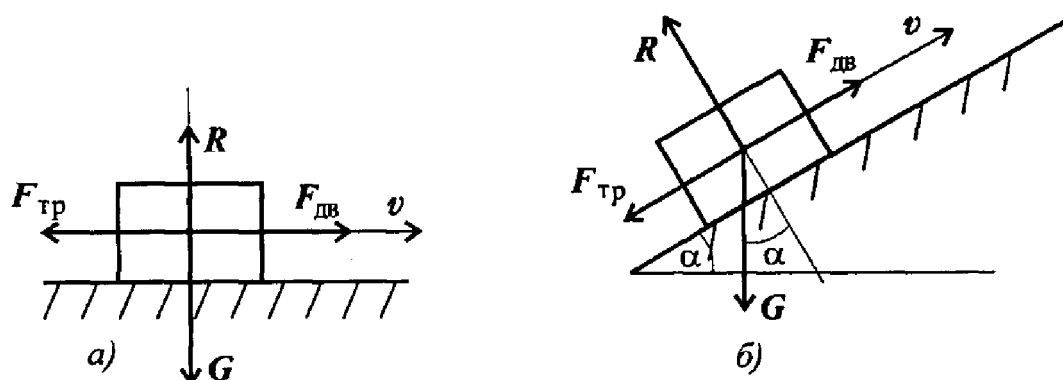


Рисунок 63

В случае движения тела по наклонной плоскости (рис.63,б)

$$R = G \cos \alpha,$$

где  $\alpha$ - угол наклона плоскости к горизонту.

Сила трения всегда направлена в сторону, обратную направлению движения.

2.Сила трения меняется от нуля до некоторого максимального значения, называемого силой трения покоя (статическое трение):

$$0 < F_f \leq F_{f_0},$$

$F_{f_0}$ -статическая сила трения (сила трения покоя).

3.Сила трения при движении меньше силы трения покоя. Сил трения при движении называется динамической силой трения ( $F_f$ )

$$F_f \leq F_{f_0}.$$

Поскольку сила нормального давления, зависящая от веса и направления опорной поверхности, не меняется, то различают статический и динамический коэффициенты трения:

$$F_f = fR; \quad F_{f_0} = f_0R.$$

Коэффициент трения скольжения зависит от следующих факторов:

-от материала: материалы делятся на *фрикционные* (с большим коэффициентом трения) и *антифрикционные* (с малым коэффициентом трения), например  $f = 0,1 \div 0,15$  (при скольжении стали по стали всухую),

$f = 0,2 \div 0,3$  (при скольжении стали по текстолиту)

- от наличия смазки, например  $f = 0,04 \div 0,05$  (при скольжении стали по стали со смазкой);

- от скорости взаимного перемещения.

### Трение качения

Сопротивление при качении связано с взаимной деформацией грунта и колеса и значительно меньше трения скольжения.

Обычно считают грунт мягче колеса, тогда в основном деформируется грунт, и в каждый момент колесо должно перекачиваться через выступ грунта. Для равномерного качения колеса необходимо прикладывать силу  $F_{дв}$  (рис. 64).

Условие качения колеса состоит в том, что движущийся момент должен быть не меньше

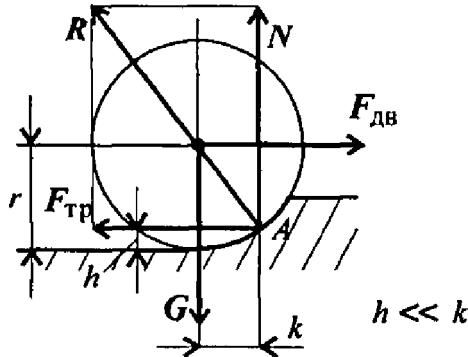


Рисунок 64.

момента сопротивления:

$$F_{дв}r \geq Nk;$$

$$N = G; \quad F_{дв} \geq k \frac{G}{r},$$

где  $k$ - максимальное значение плеча (половина колеи) принимается за коэффициент трения качения, размерность - сантиметры.

Ориентировочные значения  $k$  (определяются экспериментально): сталь по стали -  $k = 0,005$  см; резиновая шина по шоссе -  $k = 0,24$  см.

### Работа

Для характеристики действия силы на некотором перемещении точки ее приложения вводят понятие «работа силы».

Работа служит мерой действия силы, работа — скалярная величина.

#### Работа постоянной силы на прямолинейном пути

Работа силы в общем случае численно равна произведению модуля силы на длину пройденного пути и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения (рис. 67):

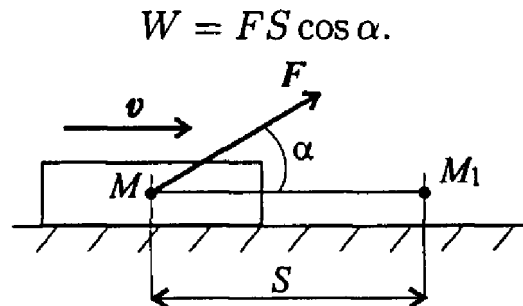


Рисунок 67.

Единицы измерения работы:

1 Дж (джоуль) = 1 Н\*м; 1 кДж (килоджоуль) = 10<sup>3</sup> Дж.

**Работа постоянной силы на криволинейном пути**

Пусть точка  $M$  движется по дуге окружности и сила  $F$  составляет некоторый угол  $\alpha$  с касательной к окружности (рис. 68).

Вектор силы можно разложить на две составляющие:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n.$$

Используя принцип независимости действия сил, определим работу каждой из составляющих силы отдельно:

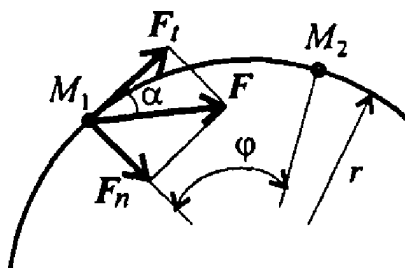


Рисунок 68.

$$W(\mathbf{F}_t) = F_t \Delta \check{S}; \quad W(\mathbf{F}_n) = F_n \Delta \check{S},$$

где  $\Delta \check{S} = M_1 \check{M}_2$  — пройденный путь.

$$\Delta \check{S} = \varphi r.$$

Нормальная составляющая силы  $F_n$  всегда направлена перпендикулярно перемещению и, следовательно, работы не производит:  $W(F_n) = 0$ .

При перемещении по дуге обе составляющие силы разворачиваются вместе с точкой  $M$ . Таким образом, касательная составляющая силы всегда совпадает по направлению с перемещением.

Будем иметь:  $W(F_t) = F_t \varphi r$ .

Касательную силу  $F_t$  обычно называют *окружной силой*.

Работа при криволинейном пути - это работа окружной силы:

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}_t).$$

Произведение окружной силы на радиус называют *вращающим моментом*:

$$M_{вр} = F_t r.$$

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угол поворота:

$$W(F) = M_{вр} \varphi.$$

**Работа силы тяжести**

Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты и равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки

(рис. 69):

$$W(G) = G(h_1 - h_2) = G\Delta h,$$

где  $\Delta h$ — изменение высоты.

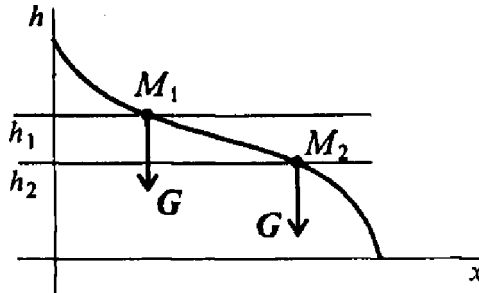


Рисунок 69.

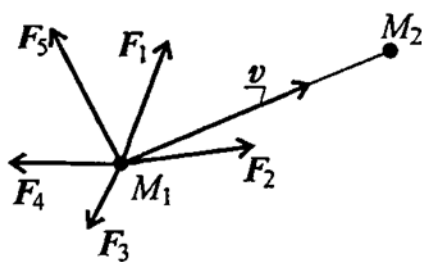
При опускании работа положительна, при подъеме отрицательна.

### Работа равнодействующей силы

Под действием системы сил точка массой  $m$  перемещается из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ (рис.70.).

В случае движения под действием системы сил пользуются теоремой о работе равнодействующей.

Работа равнодействующей на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ системы сил на том же перемещении



$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n.$$

Работа равнодействующей силы

$$W(F_{\Sigma}) = \sum_{\text{н}}^n W(F_k).$$

Рисунок 70.

Контрольные вопросы и задания:

- 1.Какие силы называют движущими?
- 2.Какие силы называют силами сопротивления?
- 3.Запишите формулы для определения работы при поступательном и вращательном движениях?
- 4.Какую силу называют окружной? Что такое вращающий момент?

### Работа и мощность.

#### Коэффициент полезного действия

*Иметь представление о мощности при прямолинейном и криволинейном перемещениях, о мощности полезной и затраченной, о коэффициенте полезного действия. Знать зависимости для определения мощности при поступательном и вращательном движениях, КПД.*

*Уметь рассчитать мощность с учетом потерь на трение и сил инерции.*

### Мощность

Для характеристики работоспособности и быстроты совершения работы введено понятие мощности.

Мощность - работа, выполненная в единицу времени:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Единицы измерения мощности: ватты, киловатты,

$$1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 1 \text{ Вт}; 10^3 \text{ Вт} = 1 \text{ кВт}.$$

*Мощность при поступательном движении*(рис.71.)

$$P = \frac{FS \cos \alpha}{t}.$$

Учитывая, что  $\frac{S}{t} = v_{\text{ср}}$ , получим

$$P = Fv_{\text{ср}} \cos \alpha,$$

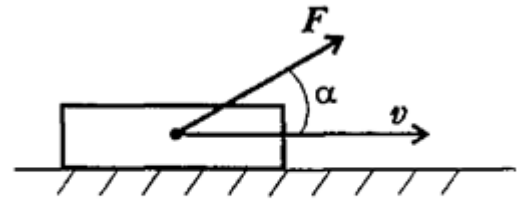


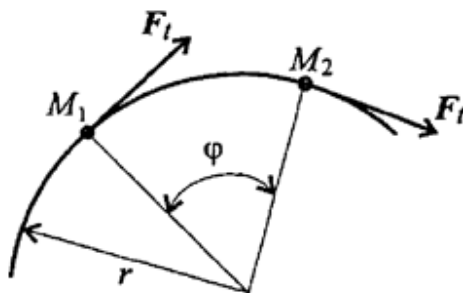
Рисунок 71.

где  $F$ - модуль силы, действующей на тело;  $v_{\text{ср}}$ - средняя скорость движения тела.

Средняя мощность при поступательном движении равна произведению модуля силы на среднюю скорость перемещения и на косинус угла между направлениями силы и скорости.

#### Мощность при вращении

Тело движется по дуге радиус



$r$  из точки  $M_1$  в точку  $M_2$ .

$$M_1 M_2 = \varphi r.$$

Работа силы:  $W = M_{\text{вр}} \varphi$   
 $M_{\text{вр}} = F_t r$ , где  $M_{\text{вр}}$  — вращающий момент.

$$P = \frac{M_{\text{вр}} \varphi}{t}.$$

Рисунок 72.

Учитывая, что  $\frac{\varphi}{t} = \omega_{\text{ср}}$ , получим

$$P = M_{\text{вр}} \omega_{\text{ср}}, \text{ где } \omega_{\text{ср}} \text{ — средняя угловая скорость.}$$

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

*Мощность силы при вращении равна произведению вращающего момента на среднюю угловую скорость.*

Если при выполнении работы усилие машины и скорость движения меняются, можно определить мощность в любой момент времени, зная значения усилия и скорости в данный момент.

### Коэффициент полезного действия

Каждая машина и механизм, совершая работу, тратит часть энергии на преодоление вредных сопротивлений.

Таким образом, машина (механизм) кроме полезной работы совершает еще и дополнительную работу.

Отношение полезной работы к полной работе или полезной мощности ко всей затраченной мощности называется коэффициентом полезного действия (КПД):

$$\eta = \text{КПД} = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}}$$

Полезная работа (мощность) расходуется на движение с заданной скоростью и определяется по формулам:

$$W = FS \cos \alpha, \quad P = Fv \cos \alpha;$$

$$W = M_{\text{вр}}\varphi, \quad P = M_{\text{вр}}\omega.$$

Затраченная мощность больше полезной на величину мощности, идущей на преодоление трения в звеньях машины, на утечки и тому подобные потери.

Чем выше КПД, тем совершеннее машина.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

### 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

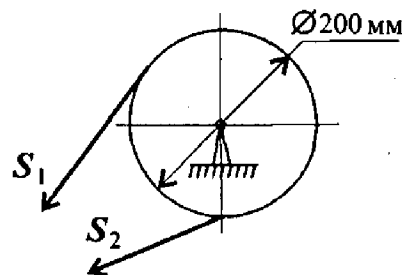
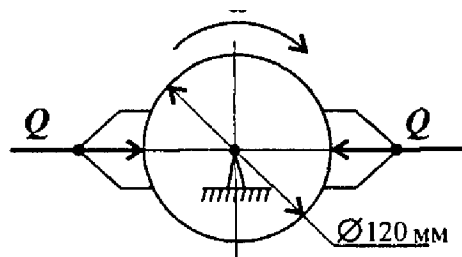


ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казakhstanская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). <https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5B072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б. <http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

### 6.Контрольные вопросы

1. Запишите основной закон динамики в векторной и дифференциальной форме?
2. На материальную точку действует постоянная сила. Как движется точка?
3. Какое ускорение получит точка, если на нее действует сила, равная удвоенной силе тяжести?
4. После столкновения двух материальных точек с массами  $m_1 = 6$  кг и  $m_2 = 24$  кг первая точка получила ускорение  $1,6$  м/с<sup>2</sup>. Чему равно ускорение, полученное второй точкой?
5. В чем заключается принцип независимости действия сил?
6. Перечислите законы трения скольжения?
7. Перечислите факторы, влияющие на величину коэффициента трения скольжения?
8. Запишите формулы для расчета работы при поступательном и вращательном движениях?
9. Вагон массой  $1000$  кг перемещают по горизонтальному пути на  $5$  м, коэффициент трения  $0,15$ . Определите работу силы тяжести?
10. Колодочным тормозом останавливают барабан после отключения двигателя (рис.73). Определите работу торможения за 3 оборота, если сила прижатия колодок к барабану  $1$  кН, коэффициент трения  $0,3$ ?
11. Натяжение ветвей ременной передачи  $S_1 = 700$  Н,  $S_2 = 300$  Н(рис.74.)? Определите вращающий момент передачи?



ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Рисунок 73.

Рисунок 74.

12. Запишите формулы для расчета мощности при поступательном и вращательном движениях?

13. Определите мощность, необходимую для подъема груза весом 0,5 кН на высоту 10 м за 1 мин.?

14. Определите общий КПД механизма, если при мощности двигателя 12,5 кВт и общей силе сопротивления движению 2 кН скорость движения 5 м/с?

### Лекция № 7

**1. Тема:** Динамика Силовые характеристики механического движения .Работа сил при прямолинейном и криволинейном движений . Мощность и и КПД. Кинетическая и потенциальная энергия. Сохранение и изменение механической энергии.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1. Основные теоремы динамики.
2. Импульс силы и количество движений.
3. Потенциальные и кинетические энергии. Об изменениях количества движений. Теорема об изменениях кинетической энергии.
4. Кинетическая энергия при поступательном, вращательном и плоскопараллельным движении тела.

Основные теоремы динамики.

#### Теорема об изменении количества движения

*Количеством движения* материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость  $mv$ .

Вектор количества движения совпадает по направлению с вектором скорости. Единица измерения  $[mv] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$ .

Произведение постоянного вектора силы на некоторый промежуток времени, в течение которого действует эта сила, называется *импульсом силы*  $Ft$ .

Вектор импульса силы по направлению совпадает с вектором

$$[Ft] = \text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

силы.

Используя основное уравнение динамики, после преобразования можно получить соотношение между количеством движения и импульсом силы (рис. 75).

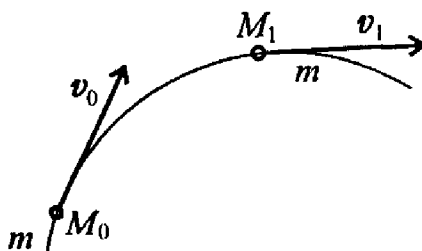


Рисунок 75.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}; \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}'.$$

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad \mathbf{F} dt = m d\mathbf{v}.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\text{Известно, что } a \cos \alpha = a_t = \frac{dv}{dt}.$$

$$\text{Откуда } F \cos \alpha = m \frac{dv}{dt}.$$

Умножив обе части полученного выражения на некоторое перемещение  $dS$ , получим:

$$F \cos \alpha dS = m \frac{dv}{dt} dS; \quad m \frac{dv}{dt} dS = mv dv.$$

$$\int_0^t F \cos \alpha dS = m \int_{v_0}^v v dv.$$

Интегрируем обе части равенства

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Полученное равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии точки: Изменение кинетической энергии на некотором пути равно работе всех действующих па точку сил на том же пути.

### Основы динамики системы материальных точек

Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется *механической системой*.

Любое материальное тело в механике рассматривается как механическая система, образуемая совокупностью материальных точек.

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Из определения механической системы следует, что движение каждой из точек, входящих в систему, *зависит* от движения остальных точек.

Силы, действующие на точки системы, делятся на *навнешние* и *внутренние*. Силы взаимодействия *между точками этой системы* называют *внутренними*. К *внешним силам* относятся силы, действующие со стороны точек, *не входящих* в эту систему.

Примерами внешних сил являются сила тяжести, сила давления, сила трения и др. К внутренним силам относятся силы упругости.

Движение механической системы зависит не только от внешних сил, но и от

$$m = \sum_0^n \Delta m_k, \quad \text{где } \Delta m_k \text{ — суммарная масса системы масс отдельных точек}$$

механической системы.

Движение системы зависит и от положения центра масс системы — условной точки, в которой сосредоточена вся масса тела. Обычно считают, что в центре масс *приложены все внешние силы*.

Движение центра масс определяет движение всей системы толь) ко при поступательном движении, при котором все точки тела движутся одинаково.

#### Основное уравнение динамики при поступательном движении тела

Для определения движения тела (системы материальных точек можно использовать второй закон динамики

$$F_{\Sigma} = ma_c,$$

где  $m$  — суммарная масса тела;  $a_c$  — ускорение центра масс тела.

В поле *земного притяжения* центр масс совпадает с центром тяжести.

#### Основное уравнение динамики вращающегося тела

Пусть твердое тело под действием внешних сил вращается вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\Delta \omega$  (рис. 76.).

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем ее на множество материальных точек с массами  $\Delta m_k$ . Каждая точка движется по окружности радиуса  $r_k$  касательным ускорением  $a_k^t = \varepsilon r_k$  и нормальным ускорением  $a_k^n = \omega^2 r_k$ , где  $\varepsilon$  — угловое ускорение.

Используем для каждой точки принцип Даламбера и приложим силы инерции:

- касательную  $\Delta F_{инк}^t = -\Delta m_k a_k^t$ ;
- нормальную  $\Delta F_{инк}^n = -\Delta m_k a_k^n$ .

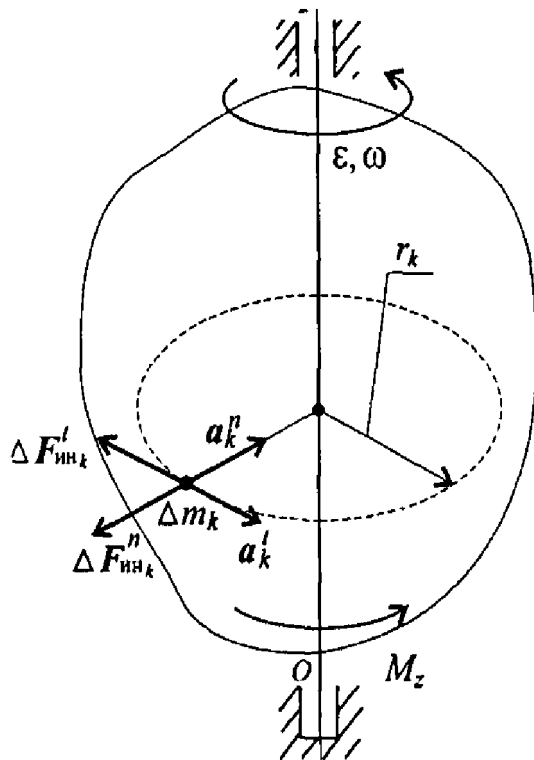
Система сил, действующих на точку, по принципу Даламбера, находится в равновесии.

Поэтому алгебраическая сумма моментов относительно оси вращения должна быть

$$M_z - \sum_0^n \Delta F_{инк}^t r_k = 0, \quad \text{где } M_z \text{ —}$$

равна нулю:

момент внешних сил.



Моменты нормальных сил инерции равны нулю, т. к. силы пересекают ось z. Силы, направленные по касательной к окружности, равны

$$\Delta F_{инк}^t = \Delta m_k a_k^t = \Delta m_k \varepsilon r_k,$$

где  $\varepsilon$  - общая величина, угловое ускорение тела.

Подставив значение силы в формулу для определения моментов, получим

$$M_z = \varepsilon \sum_0^n \Delta m_k r_k^2 \cdot \sum_0^n \Delta m_k r_k^2$$

Рисунок 76.

Величина называется моментом инерции тела относительно оси вращения и обозначается  $J_z$ .

$$J_z = \sum_0^n \Delta m_k r_k^2.$$

В результате получим выражение основного уравнения динамики вращающегося тела:

$$M_z = J_z \varepsilon,$$

где  $M_z$  - сумма моментов внешних сил относительно оси;  $\varepsilon$  - угловое ускорение тела.

Момент инерции тела в этом выражении определяет меру инертности тела при вращении.

По выражению для момента инерции можно определить, что единица измерения этой величины в системе СИ  $[J_z] = [mr^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Видно, что значение момента инерции зависит от распределения массы относительно оси вращения: при одинаковой массе момент инерции больше, если основная часть массы расположена дальше от оси вращения. Для увеличения момента инерции используют колеса со спицами и отверстиями.

### Моменты инерции некоторых тел

Момент инерции сплошного цилиндра (рис.77.)

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

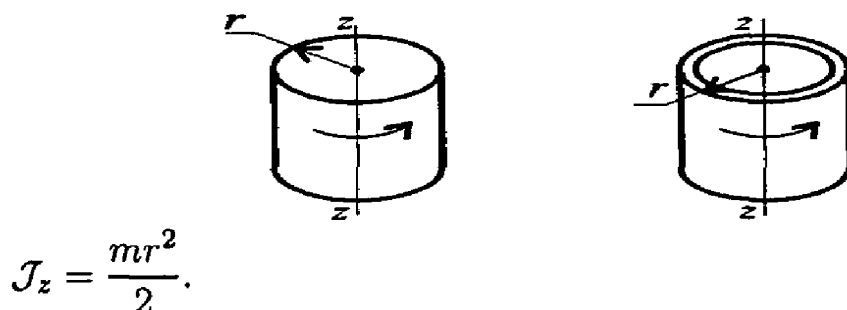


Рисунок 77.

Существуют две основные формы механической энергии: потенциальная энергия, или энергия положения, и кинетическая энергия, или энергия движения. Чаще всего приходится иметь дело с потенциальной энергией силы тяжести. Потенциальной энергией силы тяжести материальной точки или тела в механике называется способность этого тела или точки совершать работу при опускании с некоторой высоты до уровня моря (до какого-то уровня). Потенциальная энергия численно равна работе силы тяжести, произведенной при перемещении с нулевого уровня до заданного положения. Обозначив потенциальную

энергию  $E_{\Pi}$ , получим

$$E_{\Pi} = GH,$$

где  $G$  — сила тяжести точки (или тела);  $H$  — высота центра тяжести от нулевого уровня.

Кинетическая энергия определяется способностью движущегося тела (или точки) совершать работу. Для материальной точки кинетическая энергия численно равна

ее массы на квадрат скорости, т. е.  $mv^2/2$ .

Потенциальная и кинетическая энергия также измеряются в единицах работы:

$$[E_{\Pi}] = [G] [H] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж},$$

$$[E_{\text{к}}] = [m] [v^2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Всякое твердое тело или механическая система состоит из множества отдельных материальных точек. Поэтому кинетическую энергию твердого тела или какой-либо

ОҢТҰСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

механической системы можно представить как сумму кинетических энергий всех точек, образующих тело или систему. Обозначив кинетическую энергию тела или

$$E_k = \int \frac{dmv^2}{2},$$

системы  $E_k$ , получим

где  $dm$  — элементарная масса точки;  $v$  — скорость этой точки;  $m$  — масса всего твердого тела.

Кинетическая энергия тела в разных случаях его движения

Найдем кинетическую энергию твердого тела при поступательном движении (см. рис. 121). Поступательное движение тела характеризуется тем, что скорости движения всех его точек равны между собой и имеют одинаковое направление, т. е.

$$v = v_A = v_B = \dots = v_C,$$

где  $v_C$  — скорость центра тяжести тела или любой другой точки тела.

Кинетическая энергия тела для рассматриваемого случая

$$E_k = \int \frac{dmv_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \int dm = \frac{mv_C^2}{2},$$

Следовательно, кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна половине произведения квадрата скорости любой точки тела на массу тела.

Найдем кинетическую энергию тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Если тело вращается вокруг оси  $u$  с угловой скоростью  $\omega$  (см. рис. 122 и 123, а), то скорость произвольной точки тела пропорциональна расстоянию этой точки до оси вращения

$$v = r\omega,$$

где  $r$  — расстояние точки от оси вращения — величина переменная;  $\omega$  — угловая скорость (для всех точек тела имеет одинаковое значение).

Подставив значение  $v$  в формулу кинетической энергии и вынеся постоянные величины за знак суммы, получим

$$E_k = \int \frac{dmv^2}{2} = \int \frac{dm(r\omega)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \int dm r^2.$$

Численное значение интеграла  $\int dm r^2$ , представляющее сумму произведений массы каждой частицы на квадрат ее расстояния до оси вращения  $r$ , называется моментом инерции массы тела относительно этой оси и обозначается  $J_z$ . Момент инерции массы тела играет очень большую роль в динамике твердого тела.

Следовательно, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения квадрата угловой скорости на момент инерции массы тела относительно оси его вращения

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$$E_k = J_z \frac{\omega^2}{2}.$$

Плоскопараллельное движение, как было показано в кинематике, можно разложить на два движения: поступательное вместе с некоторым полюсом и вращательное вокруг полюса. Соответственно и кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с некоторым полюсом и кинетической энергии вращательного движения вокруг полюса

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где  $v$  — скорость поступательного движения полюса;  $\omega$  — угловая скорость вращения тела, не зависящая от выбора полюса.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

## 5.Литература:

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>



ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

### 6.Контрольные вопросы

1.Тело массой 10 кг поднято на высоту 6 м. Определите потенциальную энергию тела и работу, которую совершит тело при падении с этой высоты?

2.Материальная точка массой 16 кг, движущаяся со скоростью 10 м/с, остановилась через 40 с. Определите величину тормозной силы?

3.Тело массой 9,2 кг двигалось из состояния покоя 3с с ускорением  $4 \text{ м/с}^2$  под действием силы  $F$ . Определите запас кинетической энергии, накопленный телом?

## Лекция № 8

**1.Тема:** Сопротивление материалов и его основные понятия. Основные гипотезы и допущения. Материалы и форма элементов конструкции. Внутренние усилия и метод сечений.Деформации и перемещения.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1.Основные понятия о силах. Классификация простейших тел. Расчетная схема. 2.Классификация внешних сил, действующих на элементы конструкций. Внутренние силы. Реактивные силы.

3.Опоры и виды опор. Реактивные силы. Полное, нормальное и касательное напряжение. 4.Определение внутренних сил методом сечений.

«Сопротивление материалов» - это наука, в котором излагаются теоретико-экспериментальные основы и методы расчета наиболее распространенных элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

В сопротивлении материалов пользуются данными смежных дисциплин: физики, теоретической механики, материаловедения, математики и др. В свою очередь сопротивление материалов как наука является опорной базой для целого ряда технических дисциплин.

Любые создаваемые конструкции должны быть не только прочными и надежными, но и недорогими, простыми в изготовлении и обслуживании, с минимальным расходом материалов, труда и энергии.

Расчеты сопротивления материалов являются базовыми для обеспечения основных требований к деталям и конструкциям.

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

## Основные требования к деталям и конструкциям и виды расчетов в сопротивлении материалов

*Механические свойства материалов*

*Прочность* - способность не разрушаться под нагрузкой.

*Жесткость* - способность незначительно деформироваться под нагрузкой.

*Устойчивость* - способность сохранять первоначальную форму упругого равновесия.

### **Виды расчетов**

*Расчет на прочность* обеспечивает неразрушение конструкции.

*Расчет на жесткость* обеспечивает деформации конструкции под нагрузкой в пределах допустимых норм.

*Расчет на выносливость* обеспечивает необходимую долговечность элементов конструкции.

*Расчет на устойчивость* обеспечивает сохранение необходимой формы равновесия и предотвращает внезапное искривление длинных стержней.

Для обеспечения прочности конструкций, работающих при ударных нагрузках (при ковке, штамповке и подобных случаях), проводятся *расчеты на удар*.

### **Основные гипотезы и допущения**

Приступая к расчетам конструкции, следует решить, что в данном случае существенно, а что можно отбросить, т. к. решение технической задачи с полным учетом всех свойств реального объекта невозможно.

#### **Допущения о свойствах материалов:**

Материалы *однородные* — в любой точке материалы имеют одинаковые физико-механические свойства.

Материалы представляют *сплошную среду* — кристаллическое строение и микроскопические дефекты не учитываются.

Материалы *изотропны* — механические свойства не зависят от направления нагружения.

Материалы обладают *идеальной упругостью* — полностью восстанавливают форму и размеры после снятия нагрузки.

В реальных материалах эти допущения выполняются лишь отчасти, но принятие таких допущений упрощает расчет. Все упрощения принято компенсировать, введя запас прочности.

### **Классификация нагрузок и элементов конструкции**

### Классификация нагрузок:

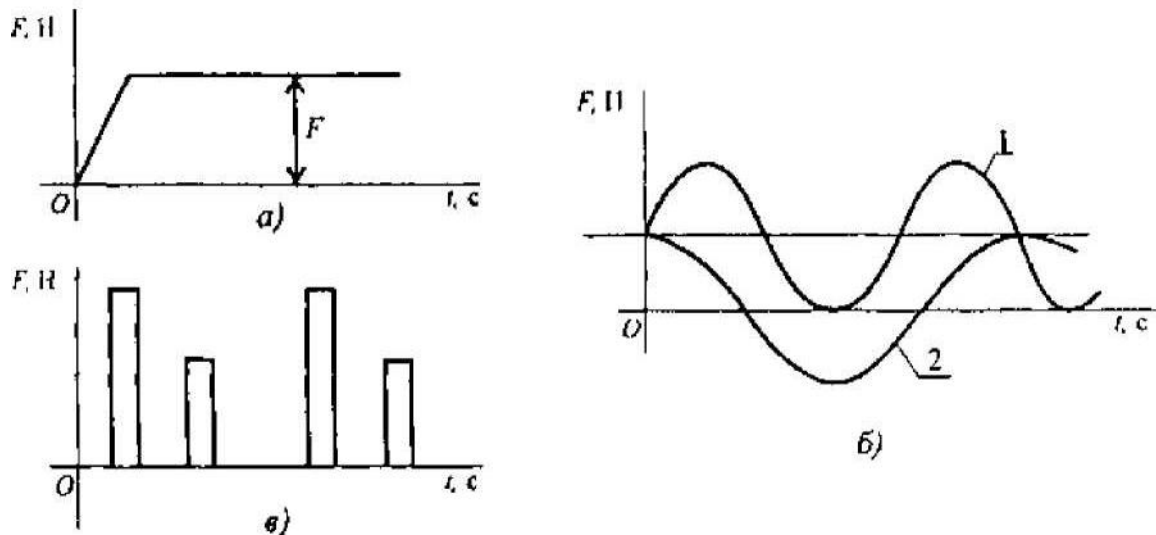


Рисунок 79.

*Статические* нагрузки (рис.79) меняются со временем или меняются очень медленно. При действии статических нагрузок проводится расчет на прочность.

*Повторно-переменные* нагрузки (рис.79,б) многократно меняют значение или значение и знак. Действие таких нагрузок вызывает усталость металла.

*Динамические* нагрузки (рис.79,в) меняют свое значение в короткий промежуток времени, они вызывают большие ускорения и силы инерции и могут привести к внезапному разрушению конструкции.

Из теоретической механики известно, что по способу приложения нагрузки могут быть *сосредоточенными* ИЛИ *распределенными* по поверхности.

Реально передача нагрузки между деталями происходит не в точке, а на некоторой площадке, т. е. нагрузка является *распределенной*.

Однако если площадка контакта пренебрежительно мала по сравнению с размерами детали, силу считают *сосредоточенной*.

При расчетах реальных деформируемых тел в сопротивлении материалов заменять *распределенную* нагрузку *сосредоточенной* НЕ следует.

Аксиомы теоретической механики в сопротивлении материалов используются ограниченно. Нельзя переносить пару сил в другую точку детали, перемещать *сосредоточенную* силу вдоль линии действия, нельзя систему сил. Заменять равнодействующей при определении перемещений. Все вышеперечисленное меняет распределение внутренних сил в конструкции.

**Формы элементов конструкции**

Все многообразие форм сводится к трем видам по одному признаку.

1. *Брус*- любое тело, у которого длина значительно больше других размеров. В зависимости от форм продольной оси и поперечных сечении различают несколько видов брусьев:

- прямой брус постоянного поперечного сечения (рис.80,а);

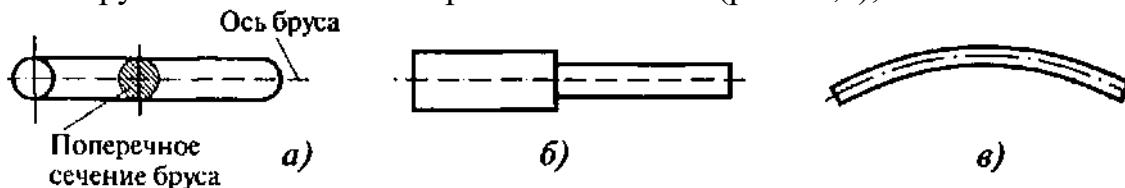


Рисунок 80.

- прямой ступенчатый брус (рис.80,б);

- криволинейный брус (рис.80,в).

2. *Пластина*- любое тело, у которого толщина значительно меньше других размеров (рис.81).



Рисунок 81.

3. *Массив* - тело, у которого три размера одного порядка.

Различают внешние и внутренние силы.

**Внешними силами ( $P$ )** называются силы, действующие на точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе. Внешние силы (нагрузка) – это активные силы и реакции связи.

**Внутренними силами ( $Q$ )** называют силы взаимодействия между точками (телами) данной системы. Они действуют и в отсутствии внешних нагрузок. При действии на тело внешних сил возникают **дополнительные внутренние силы**, сопровождающие деформацию. Эти силы сопротивляются стремлению внешних сил изменить форму тела или отделить одну часть от другой. Мы будем изучать только дополнительные внутренние силы.

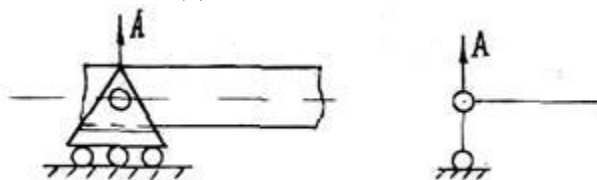
Элементы конструкции при работе испытывают внешнее воздействие, которое оценивается величиной внешней силы. К внешним силам относят активные силы и реакции опор. Под действием внешних сил в детали возникают внутренние силы упругости, стремящиеся вернуть телу первоначальную форму

и размеры. Внешние силы должны быть определены методами теоретической механики, а внутренние определяются основным методом сопротивления материалов - методом сечений. В сопротивлении материалов тела рассматриваются в равновесии. Для решения задач используют уравнения равновесия, полученные в теоретической механике для тела в пространстве. Используется система координат, связанная с телом. Чаще продольную ось детали обозначают  $z$ , начало координат совмещают с левым краем и размещают в центре тяжести сечения.

**Опоры и виды опор.** При расчете конструкций в основном встречаются элементы, испытывающие изгиб. Стержни, работающие преимущественно на изгиб, называют балками. Для того чтобы балка могла испытывать нагрузку и передавать ее на основание, она должна быть соединена с ним опорными связями. На практике применяют несколько типов опорных связей, или, как говорят, несколько типов опор.

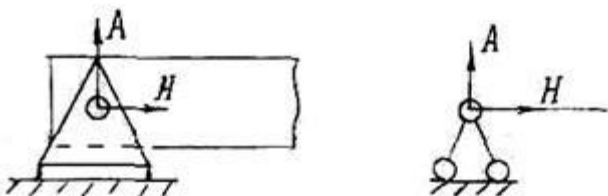
Различают три основных типа опор:

- а) шарнирно-подвижная опора:
- б) шарнирно-неподвижная опора:
- в) жесткая заделка.



**Рисунок 4**

На рисунке 4 показана шарнирно-подвижная опора, такая опора позволяет балке свободно поворачиваться и перемещаться в горизонтальном направлении. Поэтому реакция в опоре будет одна - вертикальная сила. Условное обозначение такой опоры показано справа.

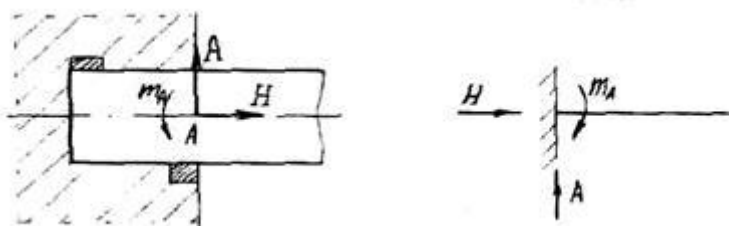


**Рисунок 5**

На рисунке 5 показана шарнирно-неподвижная опора. Такая опора позволяет балке свободно поворачиваться, но перемещаться она не может.

Поэтому могут возникать две реакции - вертикальная и горизонтальная силы. Их можно сложить и получить одну результирующую силу, но нужно знать угол, под которым она будет направлена. Более удобно будет пользоваться вертикальной и горизонтальной составляющими реакции.

На рисунке 6 показана жесткая заделка. Она не позволяет балке ни поворачиваться, ни перемещаться. Поэтому могут возникать три опорные реакции: момент, вертикальная и горизонтальная силы. Если балка не имеет на конце опоры, то эта часть ее называется консолью.



**Рисунок 6**

### Метод сечений

*Метод сечений заключается в мысленном рассечении тела, плоскостью и рассмотрении равновесия любой из отсеченных частей.*

Если все тело находится в равновесии, то и каждая его часть находится в равновесии под действием внешних и внутренних сил. *Внутренние силы определяются из уравнений равновесия, составленных для рассматриваемой части тела.*

Рассекаем тело поперек плоскостью (рис.82). Рассматриваем правую часть. На нее действуют внешние силы  $F_4; F_5; F_6$  и внутренние силы упругости  $q_k$ , распределенные по сечению. Систему распределенных сил можно заменить главным вектором  $R_0$ , помещенным в центр тяжести сечения, и суммарным моментом сил  $M_0$ :

$$R_0 = \sum_0^n q_k ; R_0 = \sum_0^n m_k$$

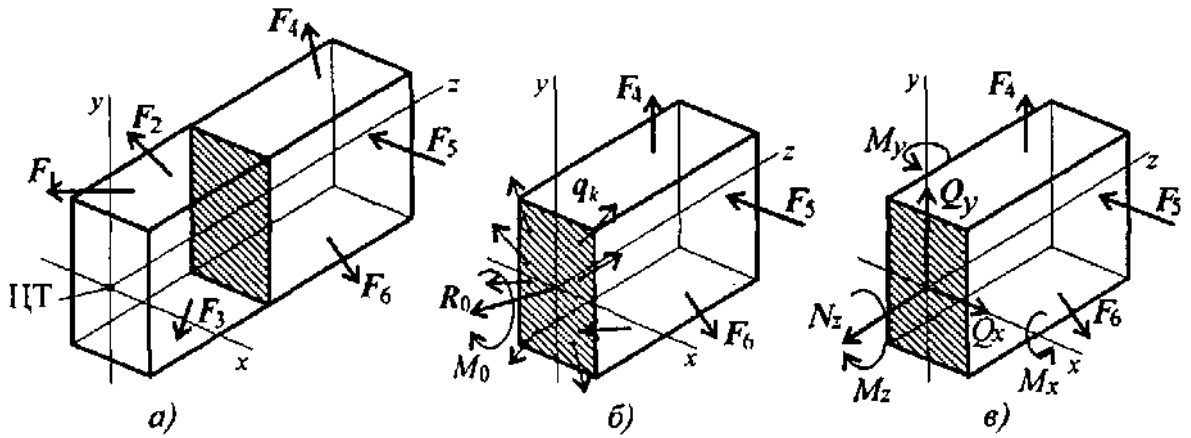


Рисунок 82.

Разложим главный вектор  $R_0$  по оси, получим три составляющие:

$$R_0 = N_z + Q_y + Q_x;$$

где  $N_z$ - продольная сила;

$Q_x$ - поперечная сила по оси  $x$ ;

$Q_y$ - поперечная сила по оси  $y$ .

Главный момент тоже принято представлять в виде моментов пар сил в трех плоскостях проекции:

$$M_0 = M_x + M_y + M_z,$$

$M_x$ - момент сил относительно  $O_x$ ;  $M_y$ - момент сил относительно  $O_y$ ;  $M_z$ - момент сил относительно  $O_z$ .

Полученные составляющие сил упругости носят название *внутренних силовых факторов*. Каждый из внутренних силовых факторов вызывает определенную деформацию детали. Внутренние силовые факторы уравновешивают приложенные к этому элементу детали внешние силы. Используя шесть уравнений равновесия, можно получить величину внутренних силовых факторов:

$$\begin{aligned}
 N_z &= \sum_0^n F_{kz}; & M_z &= \sum_0^n m_z(F_k); \\
 Q_x &= \sum_0^n F_{kx}; & M_x &= \sum_0^n m_x(F_k); \\
 Q_y &= \sum_0^n F_{ky}; & M_y &= \sum_0^n m_y(F_k).
 \end{aligned}$$

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

Из приведенных уравнений следует, что:

$N_z$ -*продольная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Z внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса; вызывает растяжение или сжатие;

$Q_x$ -*поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось X внешних сил, действующих на отсеченную часть;

$Q_y$ -*поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Y внешних сил, действующих на отсеченную часть;

силы  $Q_x$  и  $Q_y$  вызывают сдвиг сечения;

$M_z$ -*крутящийся момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно продольной оси  $O_z$ ; вызывает скручивание бруса;

$M_x$ -*изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси  $O_x$ ;

$M_y$ -*изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси  $O_y$ ;

моменты  $M_x$  и  $M_y$  вызывают изгиб бруса в соответствующей плоскости.

### Напряжения

*Метод сечений* позволяет определить величину внутреннего силового фактора в сечении, но не дает возможности установить закон распределения внутренних сил по сечению. Для оценки прочности необходимо определить величину силы, приходящуюся на любую точку поперечного сечения.

Величину интенсивности внутренних сил в точке поперечного сечения называют *механическим напряжением*. Напряжение характеризует величину внутренней силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения.

Рассмотрим брус, к которому приложена внешняя нагрузка (рис.83).

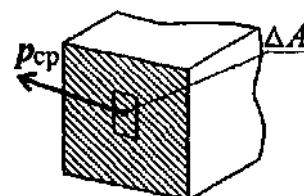
С помощью *метода сечений* рассечем брус поперечной плоскостью, отбросим левую часть и рассмотрим равновесие оставшейся правой части. Выделим на секущей плоскости малую площадку  $\Delta A$ . На этой площадке действует равнодействующая внутренних сил упругости.

Направление напряжения совпадает с направлением внутренней силы в этом сечении.

Вектор  $P_{cp}$  называют *полным напряжением*. Его принято раскладывать на два вектора (рис. 83):

$\tau$ - лежащий в площадке сечения

$\sigma$ - направленный перпендикулярно площадке.





$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Если вектор  $p$  - пространственный, то его раскла-дывают на три составляющие:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}$$

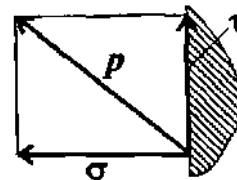


Рисунок 83.

Нормальное напряжение характеризует сопротивление сечения растяжению или сжатию.

Касательное напряжение характеризует сопротивление сечения сдвигу.

Сила  $N$  (продольная) вызывает появление нормального напряжения  $\sigma$ . Силы  $Q_x$  и  $Q_y$  вызывают появление касательных напряжений  $\tau$ . Моменты изгибающие  $M_x$  и  $M_y$  вызывают появление нормальных напряжений  $\sigma$ , переменных по сечению. Крутящий момент  $M_z$  вызывает сдвиг сечения вокруг продольной оси, поэтому появляются касательные напряжения  $\tau$ .

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

#### 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5B072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

## 6.Контрольные вопросы

1. Какие силы в сопротивлении материалов считают внешними? Какие силы являются внутренними?
2. Какими методами определяют внешние силы? Как называют метод для определения внутренних сил?
3. Сформулируйте метод сечений.
4. Как в сопротивлении материалов располагают систему координат?
5. Что в сопротивлении материалов называют внутренними силовыми факторами? Сколько в общем случае может возникнуть внутренних силовых факторов?
6. Запишите систему уравнений, используемую при определении внутренних силовых факторов в сечении?
7. Какие деформации вызываются каждым из внутренних силовых факторов?
8. Что называют механическим напряжением?
9. Какие напряжения возникают в поперечном сечении при действии продольных сил?
10. Какие напряжения возникают при действии поперечных сил?

## Лекция № 9

- 1.**Тема:** . Осевое растяжение и сжатие. Продольная сила и нормальное напряжение Деформация бруса.. Закон Гука. Диаграммы и эпюры при растяжении и сжатии.
2. **Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.
3. **Тезисы лекции:**  
**План лекции:**
  - 1.Определение внутренних сил при осевом растяжении и сжатии. Правило знаков для внутренней продольной силы.
  - 2.Принцип Сен-Венана.
  - 3.Закон Гука при центральном растяжении-сжатии стержней.

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA          AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL          ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

4. Гипотеза плоских сечений Я. Бернулли.
5. Допускаемое напряжение и подбор сечений.
6. Эпюры внутренних усилий при центральном растяжении-сжатии стержней.
7. Диаграммы растяжения и сжатия.

#### Растяжение и сжатие

*Растяжением* или *сжатием* называют вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор - продольная сила ( $N_z$ ).

Продольные силы меняются по длине бруса. При расчетах после определения величин продольных сил по сечениям строится график - эпюра продольных сил.

Условно назначают знак продольной силы.

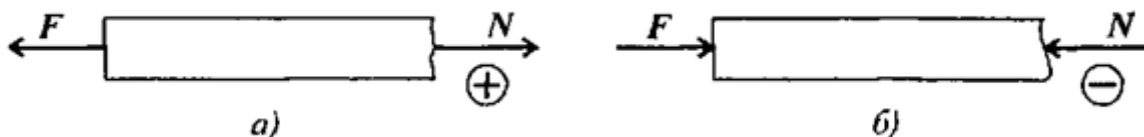


Рисунок 84.

Если продольная сила направлена *от сечения*, то брус растянут. Растяжение считают положительной деформацией (рис. 84, а).

Если продольная сила направлена *к сечению*, то брус сжат. Сжатие считают отрицательной деформацией (рис. 84, б).

Сущность принципа Сен-Венана состоит в следующем: некоторую совокупность внешних сил, действующих на малой части поверхности, можно заменить другой совокупностью внешних сил, статически эквивалентной исходной, при этом внутренние усилия и деформации, соответствующие этим нагрузкам, будут отличаться только в непосредственной близости от места приложений обеих совокупностей сил. При удалении от места приложения этих совокупностей сил внутренние усилия и деформации будут все меньше отличаться друг от друга. Иначе говоря, **способ приложения внешней нагрузки сказывается на внутренних усилиях и деформациях только на малом расстоянии от места ее приложения.**

Принцип Сен-Венана не имеет теоретического обоснования (основан на опыте), однако играет большую роль в механике деформируемого тела, позволяя:

- заменить заданную нагрузку на заданном участке другой нагрузкой, статически ей эквивалентной;
- правильно организовать экспериментальные исследования для проверки теоретических положений;
- правильно проводить анализ напряженно-деформированного состояния в местах крепления конструкции и действия нагрузок.

#### Закон Гука

В пределах упругих деформаций деформации прямо пропорциональны нагрузке:

$$F = \kappa \Delta l,$$

где  $F$ - действующая нагрузка;  $\kappa$ - коэффициент.

В современной форме:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Получим зависимость  $\sigma = E\varepsilon$ , где  $E$  - модуль упругости, характеризует жесткость материала.

В пределах упругости нормальные напряжения пропорциональны относительному удлинению.

Значение  $E$  для сталей в пределах  $(2 \div 2,1) \cdot 10^5$  МПа.

При прочих равных условиях, чем жестче материал, тем меньше он деформируется:

$$\downarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E \uparrow}$$

**Гипотеза плоских сечений** была установлена Я. Бернулли в результате экспериментов: при растяжении стержня продольные и поперечные риски, нанесенные на его поверхности до деформации, остаются прямолинейными и взаимно перпендикулярными, изменяются лишь расстояния между ними (между поперечными рисками они увеличиваются, а между продольными – уменьшаются).

В основе **гипотезы плоских сечений** лежит предположение, что и внутри стержня деформации имеют такой же характер, как на поверхности. Следовательно, сечения, плоские и нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и нормальными к его оси и после деформации. В этом и заключается **смысл гипотезы плоских сечений**.

#### Примеры построения эпюры продольных сил

Рассмотрим брус, нагруженный внешними силами вдоль оси. Брус закреплен в стене (закрепление «заделка») (рис.85,а).

Делим брус на участки нагружения.

Участком нагружения считают часть бруса между внешними силами.

На представленном рисунке 85 участка нагружения. Воспользуемся методом сечений и определим внутренние сило-вые факторы внутри каждого участка.

Расчет начинаем со свободного конца бруса, что бы не определять величины реакций в опорах.

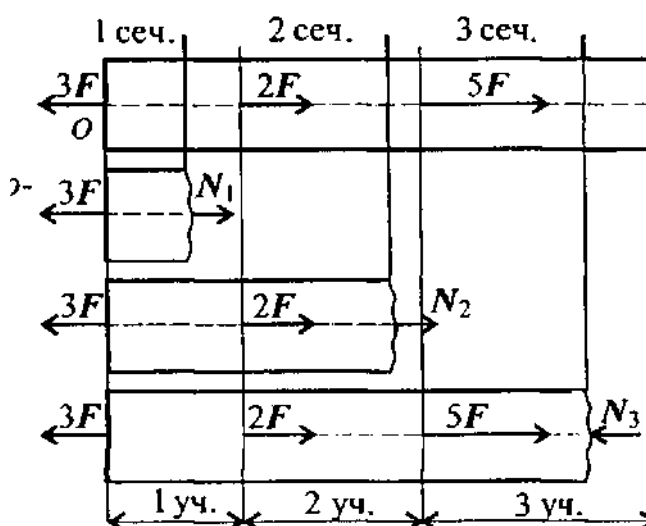


Рисунок 85.

Участок 1:  $\sum F_z = 0; -3F + N_1 = 0;$   
 $N_1 = 3F.$

Продольная сила положительна, участок 1 растянут.

Участок2:  $\sum F_z = 0; -3F + 2F + TV_2 = 0; N_2 = -F.$

Продольная сила положительна, участок 2 растянут.

Участок3:  $\sum F_z = 0; -3F + 2F + 5F - N_3 = 0; N_3 = 4F.$

Продольная сила отрицательна, участок 3 сжат. Полученное значение  $N_3$  равно реакции в заделке. Под схемой бруса строим эпюру продольной силы (рис.86).

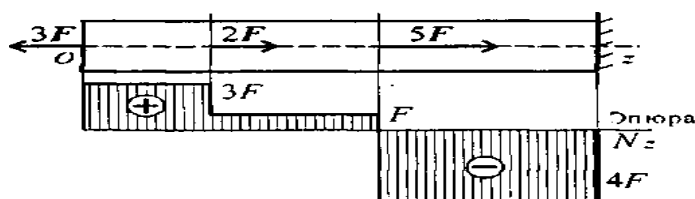


Рисунок 86.

*Эпюрой продольной силы* называется график распределения продольной силы вдоль оси бруса. Ось эпюры параллельна продольной оси. Нулевая линия проводится тонкой линией. Значения сил откладывают от оси, положительные - вверх отрицательные - вниз. В пределах одного участка значение силы не меняется, поэтому эпюра очерчивается отрезками прямых линий, параллельными оси  $Oz$ .

Правило контроля: в месте приложения внешней силы на эпюре должен быть скачок на величину приложенной силы.

На эпюре проставляются значения  $N_z$ . Величины продольных сил откладывают в заранее выбранном масштабе.

Эпюра по контуру обводится толстой линией и заштриховывается *поперек* оси. Изучая деформации при растяжении и сжатии, обнаруживаем, что выполняются *гипотеза плоских сечений* и *принцип смягчения граничных условий*.

*Гипотеза плоских сечений* заключается в том, что поперечное сечение бруса, плоское и перпендикулярное продольной оси, после деформации остается плоским и перпендикулярным продольной оси.

Следовательно, *продольные внутренние волокна удлиняются одинаково, а внутренние силы упругости распределены по сечению равномерно.*

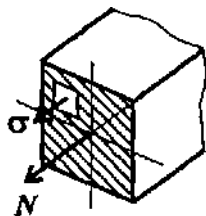
*Принцип смягчения граничных условий* гласит: в точках тела, удаленных от мест приложения нагрузки, модуль внутренних сил мало зависит от способа закрепления. Поэтому при решении задач не уточняют способ закрепления.

### Напряжения при растяжении и сжатии

При растяжении и сжатии в сечении действует только нормальное напряжение.

Напряжения в поперечных сечениях могут рассматриваться как силы, приходящиеся на единицу площади.

Таким образом, *направление и знак напряжения в сечении совпадают с направлением и знаком силы в сечении* (рис.87).



Исходя из гипотезы плоских сечений, можно предположить, что напряжения при растяжении и сжатии в пределах каждого сечения не меняются. Поэтому напряжение можно рассчитать по формуле

$$\sigma = \frac{N_z}{A},$$

Рисунок 87.

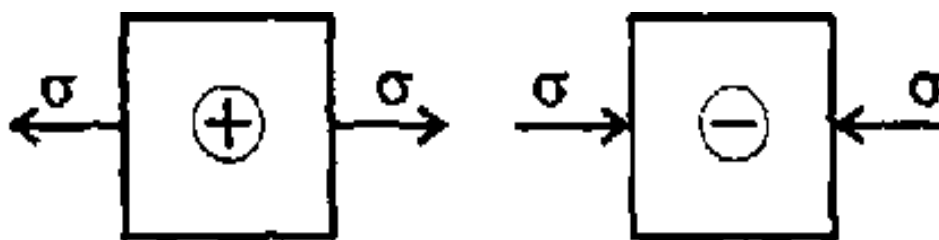
где  $N_z$ -продольная сила в сечении;  $A$ - площадь поперечного сечения.

*Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна площади поперечного сечения.*

Нормальные напряжения действуют при растяжении от сечения (рис.88,а), а при сжатии к сечению (рис.88,б).

Размерность (единица измерения) напряжений -  $\text{Н/м}^2$  (Па), однако это слишком малая единица, и практически напряжения рассчитывают в  $\text{Н/мм}^2$  (МПа):  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$ .

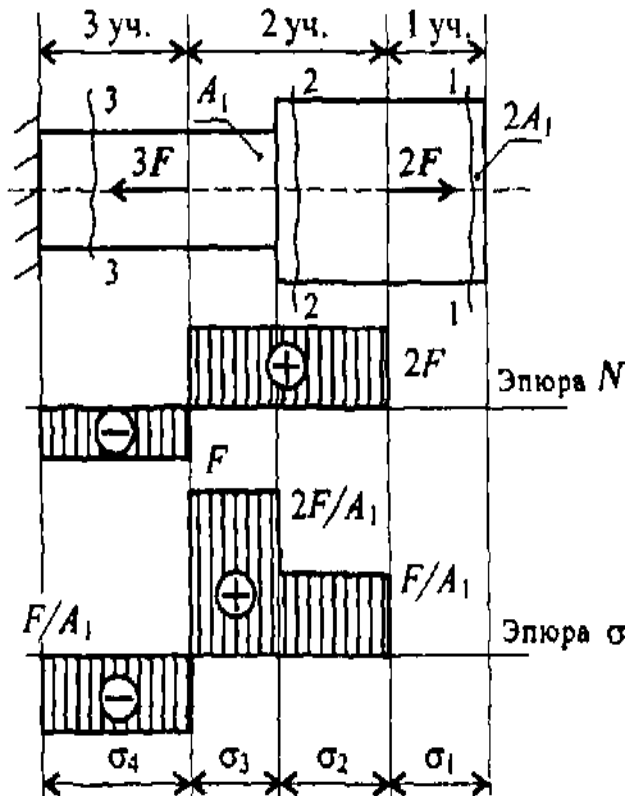
При определении напряжений брус разбивают на участки нагружений, в пределах которых продольные силы не изменяются, и учитывают места изменений площади поперечных сечений.



а)

б)

Рисунок 88.



Рассчитывают напряжения по сечениям, и расчет оформляют в виде эпюры нормальных напряжений. Строится и оформляется такая эпюра так же, как и эпюра продольных сил. Рассмотрим брус, нагруженный внешними силами вдоль оси (рис.89).

Обнаруживаем три участка нагружения и определяем величины продольных сил.

Участок 1:  $N_1 = 0$ .

Внутренние продольные силы равны нулю.

Участок 2:  $N_2 = 2F$ . Продольная сила на участке положительна.

Участок 3:  $N_3 = 2F - F = F$ . Продольная сила на участке отрицательна.

Брус - ступенчатый.

Рисунок 89.

С учетом изменений величин площади поперечного сечения участков напряжений больше.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A_1} = 0; \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_1} \oplus, \quad \sigma_3 = \frac{2F}{A_1} \oplus; \quad \sigma_4 = \frac{-F}{A_1} \ominus.$$

Строим эпюры продольных сил и нормальных напряжений. Масштабы эпюр могут быть разными выбираются исходя из удобства построения.

**4. Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально-техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

### 5. Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с  
Электронные ресурсы:
  1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
  2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
  3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
  4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

## 6.Контрольные вопросы

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении бруса при растяжении и сжатии?
2. Как распределяются по сечению силы упругости при растяжении и сжатии? (Использовать гипотезу плоских сечений.)
3. Какого характера напряжения возникают в поперечном сечении при растяжении и сжатии: нормальные или касательные?
4. Как распределены напряжения по сечению при растяжении и сжатии?
5. Запишите формулу для расчета нормальных напряжений при растяжении и сжатии?
6. Как назначаются знаки продольной силы и нормального напряжения?
7. Что показывает эпюра продольной силы?
8. Как изменится величина напряжения, если площадь поперечного сечения возрастет в 4 раза?
9. В каких единицах измеряется напряжение?
10. В чем разница между диаграммой растяжения, вычерченной автоматически, и приведенной диаграммой растяжения?
11. Какая из механических характеристик выбирается в качестве предельного напряжения для пластичных и хрупких материалов?
12. В чем различие между предельным и допускаемым напряжениями?
13. Запишите условие прочности при растяжении и сжатии. Отличаются ли



ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

условия прочности при расчете на растяжение и расчете на сжатие?

### Лекция № 10

**1.Тема:** Механические характеристики материалов. Коэффициент Пуассона. Предельные и допускаемые напряжения. Коэффициент запаса прочности.

Результаты механических испытаний и научных исследований. Пределы пропорциональности, прочности и текучести материалов.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1. Поперечная деформация при растяжении и сжатии. Потенциальная энергия деформации при растяжении.

2. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии. Статически неопределимые задачи.

3. Механические характеристики материалов.

4. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали. Диаграмма сжатия хрупких материалов. Диаграммы растяжения упруго-пластических материалов. Условные диаграммы растяжения (сжатия) низкоуглеродистых сталей.

#### Деформации при растяжении и сжатии

Рассмотрим деформацию бруса под действием продольной силы  $F$  (рис. 90.).

Начальные размеры бруса:  $l_0$ - начальная длина,  $a_0$ - начальная ширина.

Брус удлинится на величину  $\Delta l$ ;

$\Delta l$  - абсолютное удлинение. При растяжении поперечные размеры уменьшаются,

$\Delta a$  - абсолютное сужение;  $\Delta l > 0$ ;  $\Delta a < 0$ .

При сжатии выполняется соотношение  $\Delta l < 0$ ;  $\Delta a > 0$ .

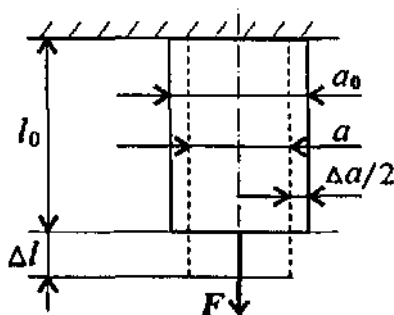


Рисунок 90.

В сопротивлении материалов принято рассчитывать деформации в относительных единицах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad \varepsilon - \text{относительное удлинение};$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a_0}, \quad \varepsilon' - \text{относительное сужение}.$$

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казakhstanская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

Между продольной и поперечной деформациями существует зависимость

$$\varepsilon' = \mu \varepsilon_1,$$

где  $\mu$  - коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона, характеризует пластичность материала.

### Закон Гука

В пределах упругих деформаций деформации прямо пропорциональны нагрузке:

$$F = \kappa \Delta l,$$

где  $F$  - действующая нагрузка;  $\kappa$  - коэффициент.

В современной форме:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Получим зависимость  $\sigma = E\varepsilon$ , где  $E$  - модуль упругости, характеризует жесткость материала.

*В пределах упругости нормальные напряжения пропорциональны относительному удлинению.*

Значение  $E$  для сталей в пределах  $(2 \div 2,1) \cdot 10^5$  МПа.

При прочих равных условиях, чем жестче материал, тем меньше он деформируется:

$$\downarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E \uparrow}$$

### Формулы для расчета перемещений поперечных сечений бруса при растяжении и сжатии

Используем известные формулы.

Закон Гука  $\sigma = E\varepsilon$ .

Откуда  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Относительное удлинение

В результате получим зависимость между нагрузкой, размерами бруса и возникающей деформацией:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \quad \text{или} \quad \Delta l = \frac{Nl}{AE}$$

где  $\Delta l$  - абсолютное удлинение, мм;

$\sigma$  - нормальное напряжение, МПа;

$l$  - начальная длина, мм;

$E$  - модуль упругости материала, МПа;

$N$  - продольная сила, Н;

$A$  - площадь поперечного сечения, мм<sup>2</sup>;

Произведение  $A$  называют жесткостью сечения.

### Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии

Рассмотрим стержень постоянного сечения, нагруженный на свободном конце сосредоточенной силой  $P$  (рис. 3.3). При постепенном возрастании силы  $P$  от нуля до некоторого значения  $P_1$  (рис. 3.28) она совершает работу  $A$  на вызванных этой силой перемещениях. Вычислим работу  $A$ , учитывая, что в упругой стадии сила пропорциональна удлинению стержня:

$$P = k \Delta l.$$

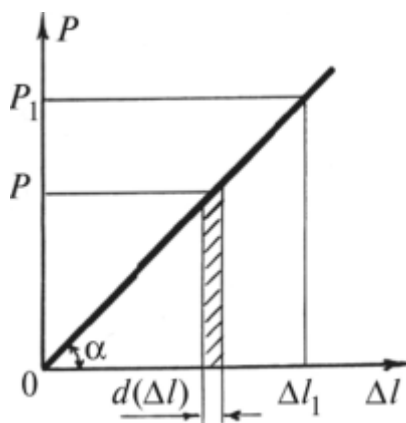


Рис. 3.28

Входящий в это равенство коэффициент  $k$  зависит от свойств материала и размеров стержня.

Элементарная работа на удлинении  $d(\Delta l)$  численно равна заштрихованной на рис. 3.28 площади или произведению среднего значения силы  $P$  на этом отрезке на величину  $d(\Delta l)$ :

$$dA = P d(\Delta l).$$

Полная работа, затраченная на удлинение стержня до величины  $\Delta l_1$  с учетом (3.25) равна

$$A = \int_0^{\Delta l_1} P d(\Delta l) = k \int_0^{\Delta l_1} \Delta l d(\Delta l) = k \frac{\Delta l_1^2}{2}.$$

Производя в полученном выражении обратную замену  $\Delta l = P/k$ , приходим окончательно к следующему выражению:

$$A = \frac{1}{2} P_1 \Delta l_1.$$

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Нетрудно заметить, что полученное выражение равно площади под линейной диаграммой  $P(A1)$ , показанной на рис. 3.28.

Поскольку сделанный вывод справедлив для любых значений  $P$  и  $A$ , относящихся к линейному участку деформирования, опустим индекс у соответствующих величин и

$$A = \frac{1}{2} P \Delta l.$$

выражение для работы силы  $P$  представим в виде

Работа, совершаемая силой  $P$ , сопровождается накоплением потенциальной энергии деформации стержня  $U$ , а также наличием кинетической энергии Сдвигения его частиц.

При статическом нагружении скорость перемещения частиц незначительна, в силу чего кинетической энергией можно пренебречь. Кроме того, при упругой работе материала можно не учитывать части работы, связанные с выделением тепла, с преодолением внутреннего трения и т.п. В силу этого можно принять, что работа силы  $P$  численно равна потенциальной энергии деформации стержня:

$$A = U = \frac{1}{2} P \Delta l.$$

### **Механические испытания, механические характеристики. Предельные и допускаемые напряжения**

Иметь представление о предельных и допускаемых напряжениях и коэффициенте запаса прочности. Знать диаграммы растяжения и сжатия пластичных и хрупких материалов, порядок расчетов на прочность.

При выборе материалов для элементов конструкции и расчетов на прочность необходимо знать механические характеристики. Необходимые сведения получают экспериментально при испытаниях на растяжение, сжатие, срез, кручение и изгиб.

#### **Расчеты на прочность при растяжении и сжатии**

Расчеты на прочность ведутся по условиям прочности — неравенствам, выполнение которых гарантирует прочность детали при данных условиях.

Для обеспечения прочности расчетное напряжение не должно превышать допускаемого напряжения:

$$\sigma \leq [\sigma], \text{ где } \sigma = \frac{N}{A}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]}.$$

Расчетное напряжение зависит от нагрузки и размеров поперечного сечения, допускаемое только от материала детали условий работы.

Существуют три вида расчета на прочность.

#### **1. Проектировочный расчет - задана расчетная схема и нагрузки; материал или размеры детали подбираются:**

-определение размеров поперечного сечения:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]};$$

- подбор материала

$$\sigma_{\text{пред}} \geq \frac{N[s]}{A};$$

по величине  $\sigma_{\text{пред}}$  можно подобрать марку материала.

2. **Проверочный расчет** - известны нагрузки, материал, размеры детали; необходимо проверить, обеспечена ли прочность. Проверяется неравенство

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

### 3. Определение нагрузочной способности (максимальной нагрузки):

$$[N] = [\sigma]A$$

#### Механические характеристики

При построении приведенной диаграммы рассчитываются величины, имеющие условный характер, усилия в каждой из точек делят на величину начальной площади поперечного сечения, хотя в каждый момент идет деформация и площадь образца уменьшается. Приведенная диаграмма растяжения не зависит от абсолютных размеров образца (рис.92).

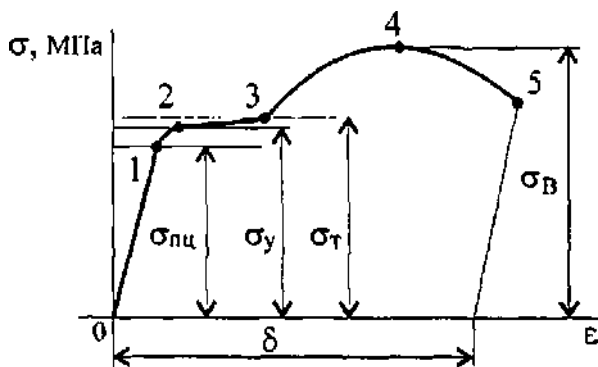


Рисунок 92.

#### Основные характеристики прочности

предел пропорциональности  $\sigma_{пц} = F_1 / A_0$

предел упругости  $\sigma_y = F_2 / A_0$

предел текучести  $\sigma_T = F_3 / A_0$

предел прочности, или временное сопротивление разрыву,

$\sigma_B = F_{\text{max}} / A_0$  где  $A_0 = \pi d_0^2 / 4$  - начальная площадь сечения.

#### Характеристики пластичности материала

$\Delta$ -максимальное удлинение в момент разрыва

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$$\delta = \frac{\Delta l_{\max}}{l_0} \cdot 100 \%,$$

где  $\Delta l_{\max}$  - максимальное остаточное удлинение;  
 максимальное сужение при разрыве

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} \cdot 100 \%,$$

где  $A_{\text{ш}}$  - площадь образца в месте разрыва.

Характеристики пластичности определяют способность материала к деформированию.

### **Предельные и допустимые напряжения**

Предельным напряжением считают напряжение, при котором в материале возникает опасное состояние (разрушение или опасная деформация).

Для пластичных материалов предельным напряжением считают предел текучести, т. к. возникающие пластические деформации не исчезают после снятия нагрузки:

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}$$

Для хрупких материалов, где пластические деформации отсутствуют, а разрушение возникает по хрупкому типу (шейки не образуется), за предельное напряжение принимают предел прочности:

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}$$

Для пластично-хрупких материалов предельным напряжением считают напряжение, соответствующее максимальной деформации 0,2% ( $\sigma_{0,2}$ ):

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{0,2}$$

Допускаемое напряжение - максимальное напряжение, при котором материал должен нормально работать.

Допускаемые напряжения получают по предельным с учетом запаса прочности:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]},$$

где  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение;  $\delta$  - коэффициент запаса прочности;  $[s]$  - допускаемый коэффициент запаса прочности.

**П р и м е ч а н и е .** В квадратных скобках принято обозначать допускаемое значение величины.

Допускаемый коэффициент запаса прочности зависит от качества материала, условий работы детали, назначения детали, точности обработки и расчета и т. д.

Он может колебаться от 1,25 для простых деталей до 12,5 для сложных деталей, работающих при переменных нагрузках в условиях ударов и вибраций.

### **Особенности поведения материалов при испытаниях на сжатие**

1. Пластичные материалы практически одинаково работают при растяжении и сжатии. Механические характеристики при растяжении и сжатии одинаковы.

2. Хрупкие материалы обычно обладают большей прочностью при сжатии, чем при растяжении:  $\sigma_{вр} < \sigma_{вс}$ .

Если допускаемое напряжение при растяжении и сжатии различно, их обозначают  $[\sigma_p]$  (растяжение),  $[\sigma_c]$  (сжатие).

### Виды диаграмм растяжения

Различные материалы по-разному ведут себя под нагрузкой, характер деформаций и разрушения зависит от типа материалов.

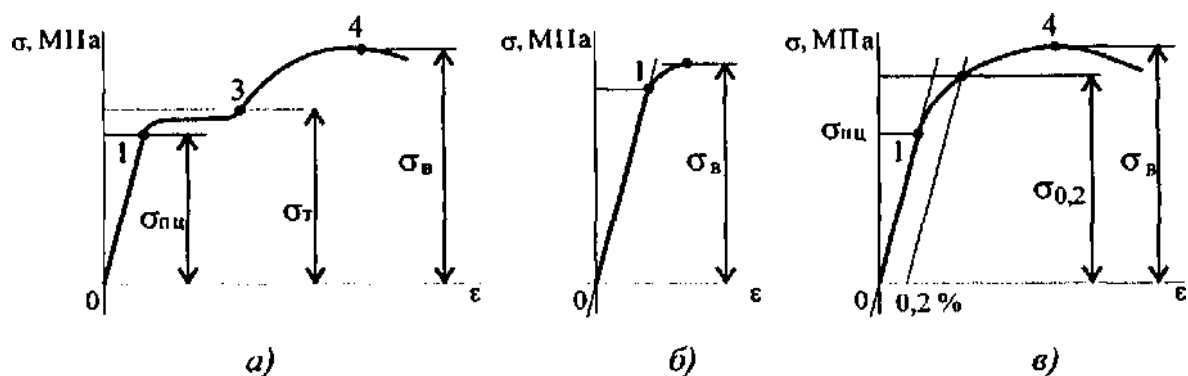


Рисунок 93. Диаграммы деформации

Принято делить материалы по типу их диаграмм растяжения на три группы. К первой группе относят пластичные материалы, эти материалы имеют на диаграмме растяжения площадку текучести (диаграммы первого типа) (рис. 93,а). Ко второй группе относятся

OÑTÚSTIK QAZAQSTAN <b>MEDISINA          AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL          ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

хрупкие материалы, эти материалы мало деформируются, разрушаются по хрупкому типу. На диаграмме нет площадки текучести (рис.93,б).

К третьей группе относят материалы, не имеющие площадку текучести, но значительно деформирующиеся под нагрузкой, их называют пластично-хрупкими (рис. 93,в).

Таким образом, хрупкий и пластично-хрупкий материалы не имеют площадки текучести, а в справочниках отсутствует характеристика «предел текучести». По этой особенности их можно узнать.

Пластично-хрупкие материалы значительно деформируются, этого нельзя допустить в работающей конструкции. Поэтому их деформацию обычно ограничивают. Максимально возможная относительная деформация  $\varepsilon=0,2$  %. По величине максимально возможной деформации определяется соответствующее нормальное напряжение  $\sigma_{0,2}$ , которое принимают за предельное.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее

#### 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

#### 6.Контрольные вопросы



ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

1. Стальной стержень длиной 1,5 м вытянулся под нагрузкой на 3 мм. Чему равно относительное удлинение? Чему равно относительное сужение? ( $\mu = 0,25$ .)
2. Что характеризует коэффициент поперечной деформации?
3. Сформулируйте закон Гука в современной форме при растяжении и сжатии?
4. Что характеризует модуль упругости материала? Какова единица измерения модуля упругости?
5. Запишите формулы для определения удлинения бруса. Что характеризует произведение  $AE$  и как оно называется?
6. Как определяют абсолютное удлинение ступенчатого бруса, нагруженного несколькими силами?

### Лекция № 11

**1.Тема:** Геометрические характеристики плоских сечений. Статический момент и инерция моментов сечений.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

- 1.Статический момент площади. Полярный момент инерции. Осевой момент инерции.
- 2.Статический момент и инерция моментов сечений.
- 3.Изменение моментов инерции при параллельном переносе и повороте.
- 4.Главные оси и главные моменты сечений.

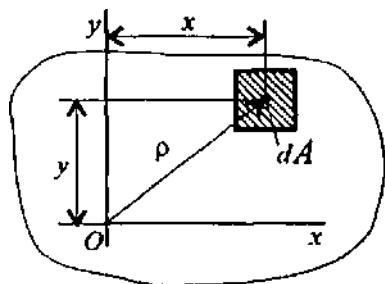
При растяжении, сжатии, смятии и сдвиге деталь сопротивляется деформации всем сечением одинаково. Здесь геометрической характеристикой сечения является площадь.

При кручении и изгибе сечение сопротивляется деформации не одинаково, при расчетах напряжений появляются другие геометрические характеристики сечения, влияющие на сопротивление сечения деформированию.

#### Статический момент площади сечения

Рассмотрим произвольное сечение (рис.98).

Если разбить сечение на бесконечно малые площадки  $dA$  и умножить каждую площадку на расстояние до оси координат и проинтегрировать полученное выражение, получим статический момент площади сечения:



- 1) относительно оси  $Ox$   $S_x = \int_A y dA$ ;
- 2) относительно оси  $Oy$   $S_y = \int_A x dA$ .

Рисунок 98.

Для симметричного сечения статические моменты каждой половины площади равны по величине и имеют разный знак. Следовательно, *статический момент относительно оси симметрии равен нулю.*

Статический момент используется при определении положения центра тяжести сечения:

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

$$x_C = \frac{\sum_0^n A_k x_k}{\sum_0^n A_k}; \quad y_C = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{\sum_0^n A_k}; \quad \sum_0^n A_k y_k \approx \int_A y dA.$$

Формулы для определения положения центра тяжести можно записать в виде

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

### **Полярный момент инерции сечения**

*Полярным моментом инерции* сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой точки:

$$J_p = \int \rho^2 dA,$$

где  $\rho$ - расстояние до полюса (центра поворота) (рис.98.).

*Поскольку  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , получим: полярный момент инерции сечения равен сумме осевых:*

$$J_p = J_x + J_y.$$

Осевые моменты инерции характеризуют сопротивление сечения повороту относительно соответствующей оси.

Полярный момент инерция характеризует сопротивление сечения повороту вокруг полюса (начала координат). Единицы измерения моментов инерции:  $m^4$ ;  $cm^4$ ;  $mm^4$ .

### **Центробежный момент инерции**

*Центробежным моментом инерции* сечения называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на обе координаты:

$$J_{xy} = \int_A xy dA.$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Центробежный момент инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент равен нулю, называются главными. Главные оси, проходящие через центр тяжести, называют *главными центральными осями сечения*.

### **Осевые моменты инерции**

Осевым моментом инерции сечения относительно некоторой оси, лежащей в этой же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой оси:

- 1) осевой момент инерции сечения относительно оси  $Ox$   

$$J_x = \int_A y^2 dA;$$
- 2) осевой момент инерции сечения относительно оси  $Oy$   

$$J_y = \int_A x^2 dA.$$

### Моменты инерции простейших сечений

#### Осевые моменты инерции прямоугольника (рис.99)

Представим прямоугольник высотой  $h$  и шириной  $b$  в виде сечения, составленного из бесконечно тонких полос. Запишем площадь такой полосы  $bdy = dA$ .

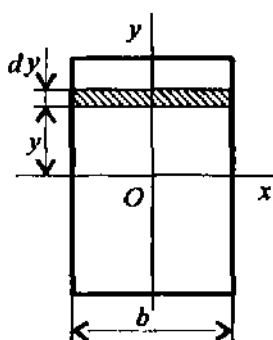


Рисунок 99.

Подставим в формулу осевого момента инерции относительно оси  $Ox$ :

$$J_x = \int_A by^2 dy = b \int_A y^2 dy;$$

$$J_x = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{2bh^3}{2^3 \cdot 3}; \text{ получим: } J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

По аналогии, если разбить прямоугольник на вертикальные полосы, рассчитать площади полос и подставить в формулу для осевого момента инерции относительно оси  $Oy$ , получим:

$$J_y = \int_A x^2 dA = \frac{hb^3}{12}.$$

Очевидно, что при  $h > b$  сопротивление повороту относительно оси  $Ox$  больше, чем относительно  $Oy$ .

$$J_x = J_y = \frac{h^4}{12}.$$

Для квадрата:  $h = b$ ;

*Полярный момент инерции круга*

Для круга вначале вычисляют полярный момент инерции, затем - осевые.

Представим круг в виде совокупности бесконечно тонких колец (рис.100).

Площадь каждого кольца можно рассчитать как площадь прямоугольника с длинной стороной, равной длине соответствующей окружности, и высотой, равной толщине кольца:  $dA = 2\pi\rho d\rho$ .

Подставим это выражение для площади в формулу для полярного момента инерции: *Рисунок 100*.

Получим формулу для расчета полярного момента

$$J_p = \int_A \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2\pi d^4}{4 \cdot 2^4} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

инерции круга:

Подобным же образом можно получить формулу для расчета полярного момента инерции кольца:

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_{вн}^4),$$

где  $d$ - наружный диаметр кольца;  $d_{вн}$ - внутренний диаметр кольца.  
 Если обозначить  $d_{вн}/d = c$ , то

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4).$$

#### Осевые моменты инерции круга и кольца

Используя известную связь между осевыми и полярным моментами инерции, получим:

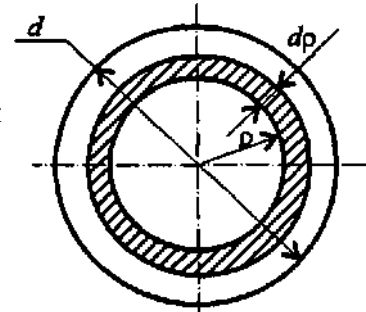
$$J_p = J_x + J_y; \quad J_x = J_y = \frac{J_p}{2};$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \text{ (круг); } \quad J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}(1 - c^4) \text{ (кольцо).}$$

#### Моменты инерции относительно параллельных осей

Оси  $O_{x0}$  и  $O_x$  параллельны (рис. 101).

При параллельном переносе прямоугольной системы осей  $y_0O_{x0}$  в новое положение  $y_0O_x$  значения моментов инерции  $J_x, J_y$  заданного сечения меняются. Задается формула перехода без вывода.



ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$$J_x = J_{x_0} + Aa^2,$$

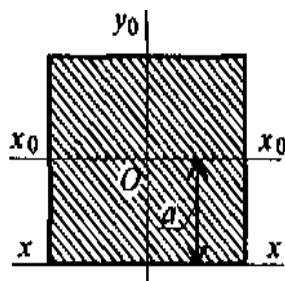


Рисунок 101.

здесь  $J_x$ - момент инерции относительно оси  $O_x$ ;  
 $J_{x_0}$  -момент инерции относительно оси  $O_{x_0}$ ;  
 $A$ - площадь сечения;  
 $a$ - расстояние между осями  $O_x$ и  $O_{x_0}$ .

### Главные оси и главные моменты инерции

*Главные оси*- это оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения: минимальный и максимальный.

Главные центральные моменты инерции рассчитываются относительно главных осей, проходящих через центр тяжести.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

### 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

### 6.Контрольные вопросы

1. Диаметр сплошного вала увеличили в 2раза. Во сколько раз увеличатся осевые моменты инерции?
2. Осевые моменты сечения равны соответственно  $J_x = 2,5$  мм и  $J_y = 6,5$  мм. Определите полярный момент сечения?
3. Осевой момент инерции кольца относительно оси  $Ox$ ,  $J_x = 4$  см<sup>4</sup>?
4. Какая из приведенных формул для определения  $J_p$  подойдет для сечения, изображенного на рис. 1?

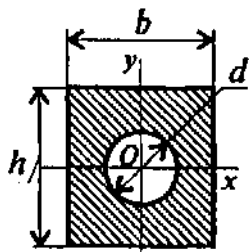


Рис. 1

#### Варианты ответа:

1.  $\frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4}$ .
2.  $\frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$ ;
3.  $\frac{bh^3}{12} + \frac{\pi d^4}{32}$ ;
4.  $\frac{\pi d^4}{32} - \frac{bh^3}{12}$ .

5. Момент инерции швеллера № 10 относительно главной центральной оси  $J_{x0} = 174$  см<sup>4</sup>; площадь поперечного сечения 10,9 см<sup>2</sup>.
6. Определите осевой момент инерции относительно оси, проходящей через основание швеллера (рис. 2).
7. Сравнить полярные моменты инерции двух сечений, имеющих практически одинаковые площади (рис. 3).

8. Сравнить осевые моменты инерции относительно оси Охпрямоугольника

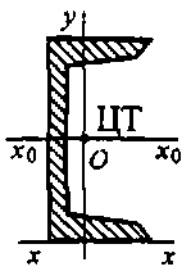


Рис. 2

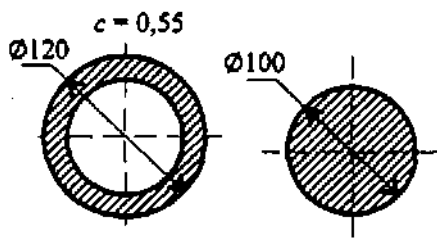


Рис. 4

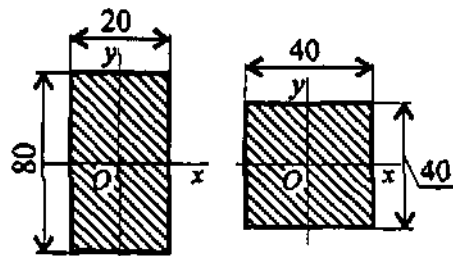


Рис. 5

и квадрата, имеющих одинаковые площади (рис.5).

### Лекция № 12

**1.Тема:** Сдвиг. Деформации и закон Гука при сдвиге. Модуль сдвига. Объемная деформация и потенциальная энергия. Гипотезы прочности. Разрыв, смятие и срез.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1. Напряжения при сдвиге. Расчеты на прочность при сдвиге.
2. Деформация и закон Гука при сдвиге. Закон парности касательных напряжений. Напряжения в наклонных сечениях при растяжении. Главные напряжения.
3. Теория прочности Мора. Основные теории прочности.
4. Смятие. Контактные напряжения.
5. Расчет шпоночных соединений на смятие. Расчет резьбовых и заклепочных соединений на прочность.

#### Сдвиг (срез)

*Сдвигом* называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор - поперечная сила.

Рассмотрим брус, на который действуют равные по величине, противоположно направленные, перпендикулярные продольной оси силы (рис. 17.).

Применим метод сечений и определим внутренние силы упругости из условия равновесия каждой из частей бруса:

$\sum F_y = 0; F - Q = 0; F = Q$ , где  $Q$  - поперечная сила. Естественно считать, что она вызовет появление только касательных напряжений  $\tau$ .

Рассмотрим напряженное состояние в точке  $B$  поперечного сечения.

Выделим элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда, к граням которого приложены напряжения (рис.94.).

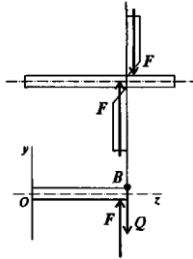


Рисунок 94.

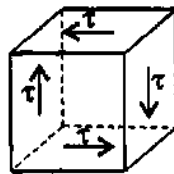


Рисунок 95.

Исходя из условия равновесия точки В, внутри бруса при возникновении касательного напряжения  $\tau$  на правой вертикальной площадке такое же напряжение должно возникнуть и на левой площадке. Они образуют пару сил. На горизонтальных площадках возникнут такие же напряжения, образующие такую же пару обратного направления (рис.96.).

Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом. Здесь действует закон парности касательных напряжений:

При сдвиге в окрестностях точки на взаимно перпендикулярных площадках возникают равные по величине касательные напряжения, направленные на соседних площадках либо от ребра, либо к ребру(рис.96,а).

В результате площадки сдвигаются на угол  $\gamma$ , называемый *углом сдвига*.

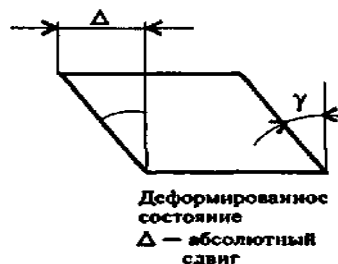
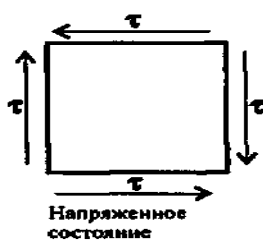
При сдвиге выполняется **закон Гука**, который в данном случае записывается следующим образом:  $\tau = G\gamma$ .

где  $\tau$ - напряжение;  $G$  - модуль упругости сдвига;  $\gamma$  - угол сдвига.

При отсутствии специальных испытаний  $G$  можно рассчитать по формуле:

$G = 0,4E$ ,  $E$ - модуль упругости при растяжении.

$[G] = \text{МПа}$ .





ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

а)                      б)

*Рисунок 96.*

Расчет деталей на сдвиг носит условный характер.

Для упрощения расчетов принимается ряд допущений:

- при расчете на сдвиг изгиб деталей не учитывается, хотя силы, действующие на деталь, образуют пару;
- при расчете считаем, что силы упругости распределены по сечению равномерно;
- если для передачи нагрузки используют несколько деталей, считаем, что внешняя сила

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c}; \quad Q = \frac{F}{z},$$

распределяется между ними равномерно, откуда формула для расчета напряжений имеет вид: где  $\tau_c$ - касательное напряжение;  $Q$  - поперечная сила;  $A_c$ - площадь сдвига;  $F$ - внешняя сдвигающая сила;  $z$ - количество деталей.

**Условие прочности при сдвиге (срезе)**

$[\tau_c]$  - допускаемое напряжение сдвига, обычно его определяют по формуле

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c} \leq [\tau_c],$$

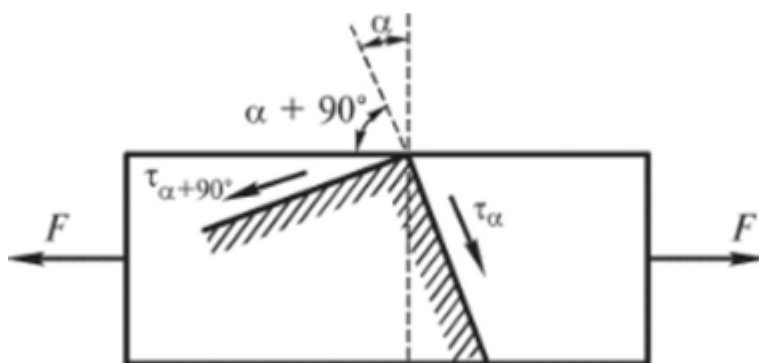
$$[\tau_c] = (0,25 \div 0,35)\sigma_T.$$

При разрушении деталь перерезается поперек. Разрушение детали под действием поперечной силы называют срезом.

**Закон парности касательных напряжений.** Напряжения в наклонных сечениях при растяжении. Главные напряжения.

Найдем касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках (рис. 4.5):

$$\tau_\alpha = \sigma \frac{\sin 2\alpha}{2}; \quad \tau_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha + 180^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$



**Рис. 4.5. Касательные напряжения на взаимно перпендикулярных сечениях**

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

Закон парности касательных напряжений гласит: на взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и противоположны по направлению. Его часто используют в сопротивлении материалов при исследовании напряженного состояния в окрестностях некоторой точки тела.

### Понятие о главных напряжениях

Подробно о главных напряжениях и их определении речь пойдет в гл. 9 и 20. Здесь же пока без вывода приведем несколько необходимых для дальнейшего изложения положений. *Главной* называется площадка, где отсутствуют касательные напряжения. Нормальные напряжения на главной площадке называются *главными напряжениями*. В окрестностях любой точки можно провести три взаимно перпендикулярных главных площадки, на которых действуют соответственно три главных напряжения.

### Теория прочности Мора (пятая гипотеза прочности).

Теория прочности Мора позволяет учесть различное сопротивление материалов растяжению и сжатию.

Например, бетон, который имеет высокую прочность на сжатие, но совершенно не может работать на растяжение. При  $[\sigma_p] = [\sigma_c]$  теория прочности Мора совпадает с третьей теорией прочности.

### Смятие

Довольно часто одновременно со сдвигом происходит смятие боковой поверхности в месте контакта в результате передачи нагрузки от одной поверхности к другой. При этом на поверхности возникают сжимающие напряжения, называемые *напряжениями смятия*,  $\sigma_{см}$ .

Расчет также носит условный характер. Допущения подобны принятым при расчете на сдвиг, однако при расчете боковой цилиндрической поверхности напряжения по поверхности распределены *не равномерно*, поэтому расчет проводят для наиболее нагруженной точки (на рис.97,а). Для этого вместо боковой поверхности цилиндра в расчете используют плоскую поверхность, проходящую через диаметр. На рисунке 97 показана примерная схема передачи давления на стержень заклепки.

Таким образом, условие прочности при смятии можно выразить соотношением

$A_{см} = d\delta$ , где  $d$ -диаметр окружности сечения;  $\delta$ -наименьшая высота соединяемых пластин;

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}];$$

$A_{см}$ - расчетная площадь смятия;

допускаемое напряжение смятия:  $[\sigma_{см}] = (0,35 \div 0,4)\sigma_T$ ;

$F$ -силавзаимодействия между деталями.

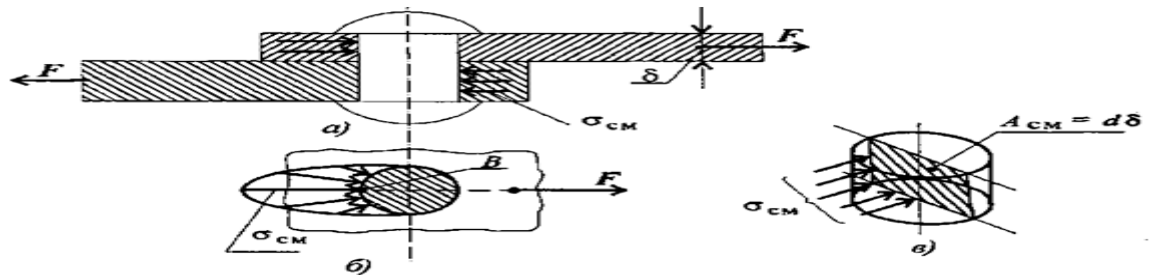


Рисунок 97.

Расчет шпоночных соединений на прочность осуществляют обычно как проверочный. Призматические шпонки рассчитывают на смятие и на срез. Для упрощения расчетов принимают плечо сил, действующих на шпонку относительно осевой линии вала, равным радиусу вала.

Соответственно проверочный расчет призматической шпонки производят по следующим формулам на смятие и срез.

На смятие

$$\sigma_{sm} = \frac{2T}{dl_p K} \leq [\sigma_{sm}]$$

На срез

$$\tau_c = \frac{2T}{dl_p b} \leq [\tau_c]$$

Где T – крутящий момент; d – диаметр вала;  
 K – справочный размер для расчета на смятие;

**Расчет на прочность резьбового соединения** обычно производят по одному критерию – **прочности нарезанной части**. При этом внутренний диаметр резьбы принимают равным

$$d_1 = d - 0.94p \quad (10.8)$$

где d - наружный (номинальный) диаметр резьбы.

**Таблица 1– Параметры резьбы**

Номинальный диаметр резьбы, d	Резьба с крупным шагом	Резьба с мелким шагом

шаг резьбы $p$	средн. диаметр $d_2$	шаг резьбы $p$	средн. диаметр $d_2$
	1,5	9,02	1,25
	1,75	10,86	1,25
		14,7	1,5
	2,5	18,37	1,5
		22,05	
			22,7

Определив по формуле (7) и (8) внутренний и средний диаметр резьбы, по таблице 10.1 находим размер резьбы болта и ее шаг. Например, вычисленному среднему диаметру болта  $d_2 = 14,7$  мм соответствует болт с номинальным диаметром резьбы 16 мм и крупным шагом 2 мм т.е. М16 х 2.

Существует **6** случаев расчета резьбовых соединений, рассмотрим первые два из них.

**Болт нагружен только внешней растягивающей силой** (грузовой крюк подъемного крана). Гайка свободно навинчивается на стержень и фиксируется шплинтом (рисунок 10.7).

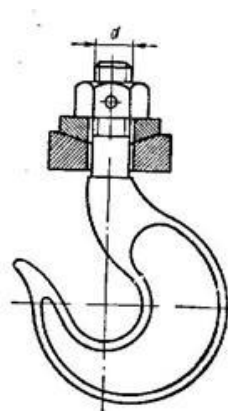


Рисунок 10.7 – Грузовой крюк

Внутренний диаметр  $d_1$  резьбы болта, определяется из условия прочности на **растяжение**

$$\sigma_B = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_s] \quad (10.9)$$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi [\sigma_s]}}$$

где  $F$  – растягивающая сила,

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$[\sigma_s] = 0,6 \sigma_T$   $\sigma_T$  допускаемое напряжение,  
 $\sigma_T$  - предел текучести (по таблице).

По значению  $d_1$  из таблицы выбирают шаг и резьбу.

**Болт затянут силой  $F_0$** , внешняя нагрузка отсутствует – болты для крепления крышек корпусов механизма. Здесь болт испытывает **растяжение и кручение**. Эти силы заменяют одной  $F_{расч}$

$$F_{расч} = 1,3F_0, \quad (10.11)$$

$$\sigma = \frac{4F_{расч}}{\pi d_1^3} \leq [\sigma_s], \quad (10.12)$$

откуда 
$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{4F_{расч}}{\pi[\sigma_s]}}, \quad (10.13)$$

где 
$$[\sigma_s] = \frac{\sigma_T}{[S_T]}, \quad (10.14)$$

$\sigma_T$  – предел текучести материала болта,

$[S_T]$  – коэффициент запаса прочности (по таблице).

В начале расчета ориентировочно задают диаметр резьбы и по таблице принимают  $[S_T]$ . Если после расчета получается диаметр, который не лежит в принятом интервале, задаются другим диаметром и расчет повторяют. Для грузовых соединений диаметр болта принимают равным не менее 8 мм.

Основными видами нагрузки заклепочного соединения являются силы  $F$ , и моменты  $T$ , действующие в плоскости стыка. При этом часть нагрузки передают силы трения на стыке. Тело заклепки подвержено действию напряжений среза, смятия и изгиба. При расчете соединения условно полагают, что трение на стыке отсутствует (его учитывают при выборе допускаемых напряжений).

В расчете заклепочных соединений деталей машин общего назначения полагают, что центральная сила распределена между заклепками равномерно, а момент – пропорционально расстоянию от заклепки до центра масс сечений заклепок (аналогично распределению нагрузки в групповом резьбовом соединении, нагруженном в плоскости стыка). Суммарную силу  $F_{\Sigma 1max}$  действующую на наиболее нагруженную заклепку (одну из наиболее удаленных от центра масс) определяют геометрическим способом. Условие прочности заклепки по срезу выглядит следующим образом:

$$T_{CP} = F_{\Sigma 1max} / (\pi d^2 / 4),$$

где  $F_{\Sigma 1max}$  – суммарная сила,  $d$  – диаметр заклепки.

Условие прочности по смятию:

$$\sigma_{CM} = F_{\Sigma 1max} / d \delta_{min} \leq [\sigma]_{CM},$$

где  $\delta_{min}$  – толщина более тонкой из соединяемых деталей,  $[\sigma]_{CM}$  – предел прочности материала на смятие,  $\sigma_{CM}$  – напряжения смятия.

Если необходимо, проверяют прочность соединяемых деталей с учетом ослабления их отверстиями под заклепки. Условие прочности соединяемых деталей на растяжение:

$$\sigma_p = F / (b - 2 d) \delta_1 \leq [\sigma]_{p.осн},$$

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

где  $b$  - ширина соединяемой детали,  $[\sigma]_{P.OCH}$  - предел прочности на растяжение,  $\sigma_p$  - растягивающие напряжения в соединении.

Для этого же соединения условие предотвращения прорезания детали заклепками:

$$\tau_{CP} = F / 4 \delta P \leq [\tau]_{CP.OCH} = [\tau]_{CP},$$

где  $P$  - расстояние между заклепками,  $\delta$  - толщина соединяемой детали,  $[\tau]_{CP.OCH}$  - предел прочности на срез материала детали,  $\tau_{CP}$  - напряжения среза.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

## 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

## 6.Контрольные вопросы

1. Какие внутренние силовые факторы возникают при сдвиге и смятии?
2. Сформулируйте закон парности касательных напряжений?
3. Как обозначается деформация при сдвиге?
4. Запишите закон Гука при сдвиге?

ОҢТҰСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA          AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL          ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

5. Какой физический смысл у модуля упругости?
6. Укажите единицы измерения напряжений сдвига и смятия и модуля упругости?
7. Как учесть количество деталей, использованных для передачи нагрузки при расчетах на сдвиг и смятие?
8. Запишите условия прочности на сдвиг и смятие?
9. Почему при расчете на смятие цилиндрических деталей вместо боковой цилиндрической поверхности подставляют плоскость, проходящую через диаметр?
10. Чем отличается расчет на прочность при сдвиге односрезной заклепки от двухсрезной?

### Лекция № 13

**1.Тема:** Кручение. Расчеты на прочность и жесткость при кручении. Потенциальная энергия деформации при кручении.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1. Понятие о кручении круглого цилиндра. Детали машин, работающие на деформацию кручения.
2. Крутящий момент и деформация. Эпюра крутящих моментов. Угол закручивания при кручении. Главные напряжения при кручении круглого бруса.
3. Условие прочности при кручении. Условие жесткости при кручении. Расчет цилиндрических винтовых пружин.

Кручением называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только крутящий момент.

Так как на кручение работают валы, обычно имеющие круглое или кольцевое сечение, то рассмотрим кручение круглого цилиндра, подвергнем брус деформации кручения.

1) ось цилиндра, называемая осью кручения, останется прямолинейной;

Из этого можно заключить, что при кручении круглого цилиндра справедлива гипотеза плоских сечений, а также предположить, что радиусы окружностей остаются при деформации прямыми.

Из сказанного выше следует, что деформация кручения круглого цилиндра состоит в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения, причем углы поворота их прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения.

На этом основании заключаем, что при кручении также возникает деформация сдвига, но не за счёт поступательного, а в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого.

Следовательно, при кручении в поперечных сечениях возникают только касательные внутренние силы, образующие крутящий момент.

#### Деформации при кручении

Кручение круглого бруса происходит при нагружении его парами сил с моментами в плоскостях, перпендикулярных продольной оси. При этом образующие бруса искривляются и

разворачиваются на угол  $\gamma$ , называемый *углом сдвига* (угол поворота образующей). Поперечные сечения разворачиваются на угол  $\varphi$ , называемый *углом закручивания* (угол поворота сечения, рис.13.1).

Длина бруса и размеры поперечного сечения при кручении не изменяются.

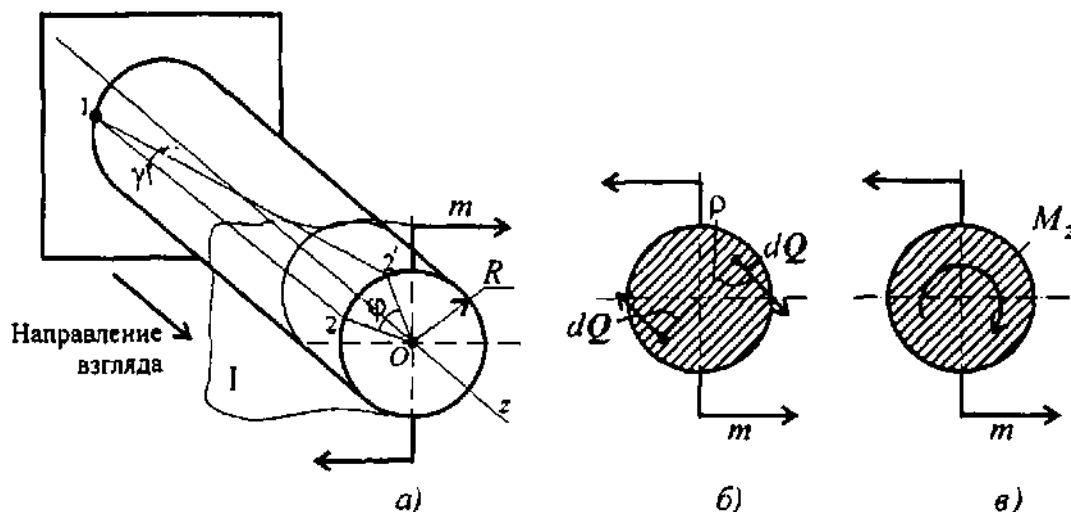


Рисунок 13.1

Связь между угловыми деформациями определяется соотношением

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{R};$$

$l$ -длина бруса;  $R$ - радиус сечения.

Длина бруса значительно больше радиуса сечения, следовательно,  $\varphi \gg \gamma$ .

Угловые деформации при кручении рассчитываются в радианах.

### Гипотезы при кручении

1. Выполняется гипотеза плоских сечений: поперечное сечение бруса, плоское и перпендикулярное продольной оси, после деформации остается плоским и перпендикулярным продольной оси;
2. Радиус, проведенный из центра поперечного сечения бруса, после деформации остается прямой линией (не искривляется);
3. Расстояние между поперечными сечениями после деформации не меняется. Ось бруса не искривляется, диаметры поперечных сечений не меняются

### Внутренние силовые факторы при кручении

*Кручением* называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор - крутящий момент.

Внешними нагрузками также являются две противоположно направленные пары сил.

### Эпюры крутящих моментов



Крутящие моменты могут меняться вдоль оси бруса. После определения величин моментов по сечениям строим график-эпюру крутящих моментов вдоль оси бруса.

**Крутящий момент считаем положительным**, если моменты внешних пар сил направлены **по часовой стрелке**, в этом случае момент внутренних сил упругости направлен против часовой стрелки (рис.13.2).

Порядок построения эпюры моментов аналогичен построению эпюр продольных сил. Ось эпюры параллельна оси бруса, значения моментов откладывают от оси вверх или вниз, масштаб построения выдерживать обязательно.

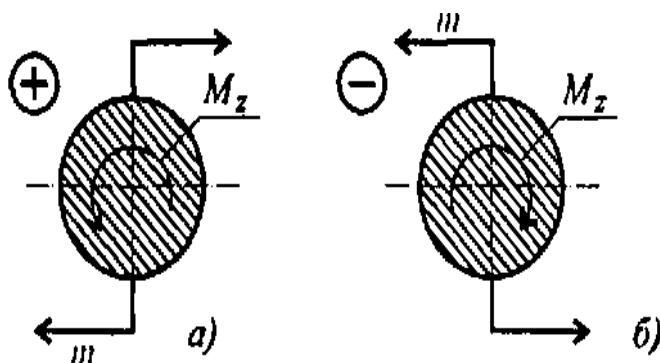


Рисунок 13.2

Условие прочности при кручении. Условие жесткости при кручении. Расчет цилиндрических винтовых ружин.

Из формулы для определения напряжений и эпюры распределения касательных напряжений при кручении видно, что максимальные напряжения возникают на поверхности.

Определим максимальное напряжение, учитывая, что  $\rho_{max} = d/2$ , где  $d$  - диаметр бруса круглого сечения.

Для круглого сечения полярный момент инерции рассчитывается по формуле

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Максимальное напряжение возникает на поверхности, поэтому имеем

$$\tau_k^{max} = \frac{M_k d/2}{J_p}.$$

Обычно  $J_p/\rho_{max}$  обозначают  $W_p$  и называют моментом сопротивления при кручении, или полярным моментом сопротивления сечения

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}.$$

Таким образом, для расчета максимального напряжения на поверхности круглого бруса получаем формулу

ОҢТҰСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$$\tau_{\text{к}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p}$$

Для круглого сечения  $W_p = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi d^3}{16}$ ;  $W_p \approx 0,2d^3$ .

Для кольцевого сечения  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4)$ , где  $c = \frac{d_{\text{вн}}}{d}$ .

*Условие прочности при кручении*

Разрушение бруса при кручении происходит с поверхности, при расчете на прочность используют условие прочности

$$\tau_{\text{к}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leq [\tau_{\text{к}}],$$

где  $[\tau_{\text{к}}]$  - допускаемое напряжение кручения.

#### **Виды расчетов на прочность**

Существует три вида расчетов на прочность:

1. *Проектировочный расчет* - определяется диаметр бруса (вала) в опасном сечении:

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{0,2d^3} \leq [\tau_{\text{к}}].$$

Откуда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0,2[\tau_{\text{к}}]}}$$

2. *Проверочный расчет* - проверяется выполнение условия прочности

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leq [\tau_{\text{к}}].$$

3. *Определение нагрузочной способности* (максимального крутящего момента)

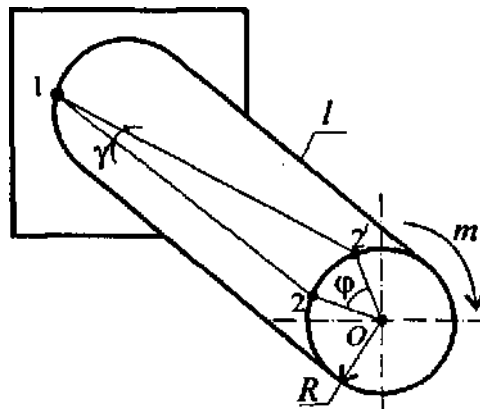
$$[M_{\text{к}}] = [\tau_{\text{к}}]W_p.$$

#### **Расчет на жесткость**

При расчете на жесткость определяется деформация и сравнивается с допускаемой. Рассмотрим деформацию круглого бруса над действием внешней пары сил с моментом  $m$  (рис.13.3).

$$\gamma = \frac{\varphi R}{l}$$

Закон Гука имеет вид  $\tau_k = G\gamma$ .  
 Подставим выражение для  $\gamma$ , получим



$$\tau_k = G \frac{\varphi d/2}{l}; \text{ используем } \tau_k = \frac{M_k d/2}{J_p},$$

откуда

$$\varphi = \frac{\tau_k l}{G d/2} = \frac{M_k l}{G J_p}.$$

Рисунок 13.3

Произведение  $GJ_p$  называют *жесткостью сечения*.

Модуль упругости можно определить как  $G \cong 0,4E$ . Для стали  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа.

Обычно рассчитывается угол закручивания, приходящийся на один метр длины бруса (вала)  $\varphi_0$ .

Условие жесткости при кручении можно записать в виде

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{G J_p} \leq [\varphi_0],$$

где  $\varphi_0$  - относительный угол закручивания,  $\varphi_0 = \varphi/l$

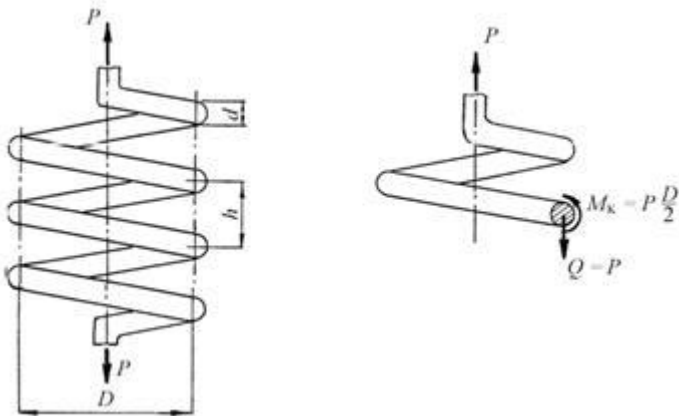
$[\varphi_0] = 1 \text{ град/м} = 0,02 \text{ рад/м}$  - допустимый относительный угол закручивания.

Цилиндрические винтовые пружины являются распространенными конструктивными элементами современных механизмов и машин. При проектировании пружин проводятся расчеты на прочность и жесткость.

Рассмотрим расчеты только цилиндрических винтовых пружин растяжения или сжатия, изготовленных из проволоки круглого поперечного сечения.

Пружина характеризуется следующими геометрическими параметрами (Рис.13.4,а): диаметр витка  $D$ ; диаметр сечения проволоки  $d$ , из которой навита пружина; число рабочих витков  $n$  (концевые витки, служащие для крепления пружины к смежным деталям, не учитываются); шаг витка пружины  $h$ .

Ограничимся рассмотрением винтовой пружины с малым шагом витков  $h$  по сравнению с диаметром пружины  $D$ . При этом условии наклоном витков можно пренебречь и считать, что любое поперечное сечение проволоки параллельно силам  $P$ , растягивающим пружину.

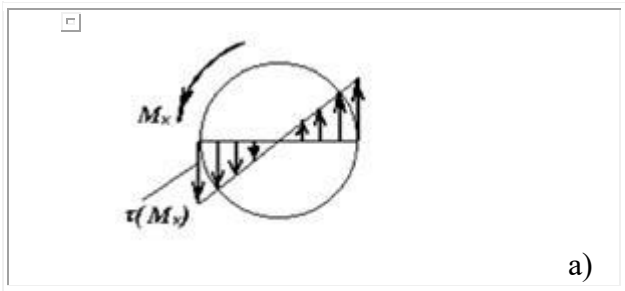


а)

б)

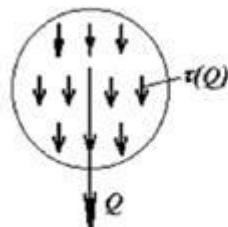
Рисунок 13.4

Для определения внутренних силовых факторов, возникающих в сечении пружины, рассечем один из витков плоскостью, проходящей через ось пружины, и рассмотрим равновесие одной из отсеченных частей, например, верхней (Рис. 2.18, б).



а)

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117



б)

Рисунок 13.5

Учитывая, что угол наклона витка пружины мал, можно пренебречь наличием в сечении продольной силы и изгибающего момента, тогда из условия равновесия найдем, что в сечении должны возникнуть поперечная сила  $Q$  и крутящий момент  $M_K$ , равные:

$$Q = P; M_K = PD / 2 .$$

Оба эти силовых фактора вызывают только касательные напряжения.

Предполагая равномерное распределение напряжений от силы  $Q$  (рис.2.19, а) получим для любой точки сечения:

$$\tau(Q) = \frac{Q}{F},$$

где  $F = \frac{\pi d^2}{4}$  - площадь сечения проволоки.

От крутящего момента напряжения распределены вдоль радиуса сечения по линейному закону, максимальные из которых достигаются на поверхности сечения и равны:

$\tau(M_K) = \frac{M_K}{W_P}$ , здесь  $W_P = \pi d^3 / 16$  - полярный момент сопротивления сечения.

Таким образом, в наиболее опасном состоянии находится точка, расположенная на внутренней стороне сечения, где рассмотренные выше напряжения совпадают по направлению и суммируются:

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

#### 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117	

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с

2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг

2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>

3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>

4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://tmebrk.kz/>

5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

#### Лекция № 14

**1.Тема:** Изгиб. Опоры и их реакции. Внутренние усилия. Продольный и поперечный изгиб. Потенциальная энергия деформаций и главные напряжения при изгибе.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

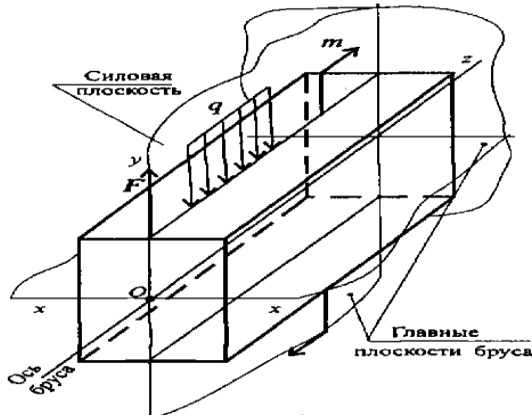
1.Понятие о чистом изгибе прямого бруса. Изгибающий момент и поперечная сила. Дифференциальные зависимости между поперечной силой и изгибающим моментом.

2.Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Нормальные напряжения при изгибе.

3.Расчеты на прочность при изгибе. Касательные напряжения при изгибе. Формула Журавского.

4.Упругая линия балки. Условие прочности при изгибе.

*Изгибом* называется такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает внутренний силовой фактор - *изгибающий момент*.



Брус, работающий на изгиб, называют *балкой*.

Изображен брус, закрепленный справа (защемление), нагруженный внешними силами и моментом (рис.108).

Плоскость, в которой расположены внешние силы и моменты, называют *силовой плоскостью*. Если все силы лежат в одной плоскости, изгиб называют *плоским*.

Рисунок 108.

Плоскость, проходящая через продольную ось бруса и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называется *главной плоскостью бруса*.

Если *силовая плоскость* совпадает с *главной* плоскостью бруса, изгиб называют *прямым* (рис.108).

Если *силовая плоскость* не проходит через главную плоскость бруса, изгиб называют *косым изгибом* (рис.109).

### Принятые знаки поперечных сил и изгибающих моментов

Поперечная сила в сечении считается *положительной*, если она стремится *развернуть сечение по часовой стрелке* (рис.110,а), если *противоположительно* (рис.110,б).

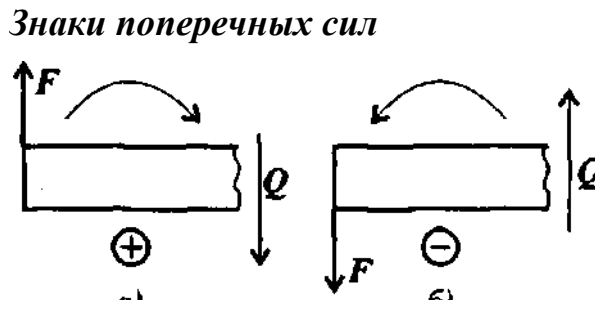


Рисунок 110.

### Знаки изгибающих моментов

Если действующие на участке внешние силы стремятся изогнуть балку *выпуклостью вниз*, то изгибающий момент считается *положительным* (рис.111,а), если *наоборот - отрицательным* (рис.111,б).

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

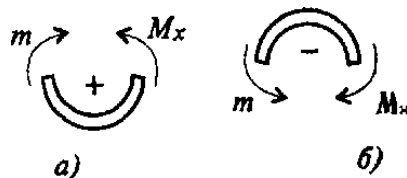


Рисунок 111.

При чистом изгибе в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент, постоянный по величине.

При поперечном изгибе в сечении возникает изгибающий момент и поперечная сила.

Изгибающий момент в произвольном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к отсеченной части, относительно рассматриваемого сечения.

Поперечная сила в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих на отсеченной части на соответствующую ось.

#### Дифференциальные зависимости при прямом поперечном изгибе

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов существенно упрощается при использовании дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью равномерно распределенной нагрузки (теорема Журавского):

Поперечная сила равна производной от изгибающего момента по длине балки:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q.$$

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки равна производной от поперечной силы по длине балки:

$$\frac{dQ}{dz} = q.$$

Из выше указанного следует:

если  $M_n = \text{const}$ , то  $Q = 0$ ;      если  $Q = \text{const}$ ; то  $q = 0$ .

#### Деформации при чистом изгибе

При чистом изгибе в сечении возникает только один внутренний силовой фактор - изгибающий момент.

Рассмотрим деформацию бруса, нагруженного внешней парой сил с моментом  $m$  (рис.114,а).

При чистом изгибе выполняются гипотезы плоских сечений и ненадавливаемости слоев.

Сечения бруса, плоские и перпендикулярные продольной оси, после деформации остаются плоскими и перпендикулярными продольной оси.

Продольные волокна не давят друг на друга, поэтому слои испытывают простое растяжение или сжатие.

Действуют только нормальные напряжения.



OÑTÚSTIK QAZAQSTAN <b>MEDISINA          AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL          ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Поперечные размеры сечений не меняются.

Продольная ось бруса после деформации изгиба искривляется и образует дугу окружности радиуса  $\rho$  (рис.114,б). Материал подчиняется закону Гука.

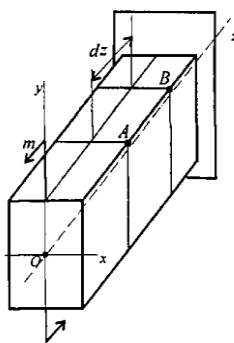


Рисунок 114,а.

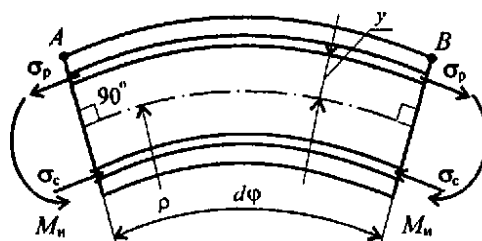


Рисунок 114,б.

Можно заметить, что слои, расположенные выше продольной оси, растянуты, расположенные ниже оси - сжаты (рис.114,б). Так как деформации по высоте сечения меняются непрерывно, имеется слой, в котором нормальные напряжения  $\sigma$  равны нулю; такой слой называют *нейтральным слоем* (НС). Доказано, нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения;  $\rho$ - радиус кривизны нейтрального слоя.

Рассмотрим деформацию слоя, расположенного на расстоянии  $y$  от нейтральной оси (участок  $AB$ ).

Длина участка до деформации равна длине нейтральной оси:

$$l_0 = \rho d\varphi.$$

Относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}; \varepsilon = \frac{y d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Относительное удлинение прямо пропорционально расстоянию слоя до нейтральной оси.

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Используем закон Гука при растяжении:

Получим зависимость нормального напряжения при изгибе от положения слоя:

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{E y}{\rho}$$

### Формула для расчета нормальных напряжений при изгибе

Рассмотрим изогнутый участок бруса  $dz$  (рис.115).

$dN$ - элементарная продольная сила в точке сечения;

$dA$ - площадь элементарной площадки;

$dm$ - элементарный момент, образованный силой относительно нейтрального слоя.



Рисунок 115.

$$dN = \sigma_{\text{н}} dA; \quad dm = \sigma_{\text{н}} y dA.$$

Суммарный изгибающий момент сил упругости в сечении

После ряда преобразований получим формулу для определения нормальных напряжений в любом слое поперечного сечения бруса:

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_{\text{н}} y}{J_x},$$

где  $J_x$ - геометрическая характеристика сечения при изгибе.

Эпюра распределения нормальных напряжений при изгибе изображена на рис.116.

По эпюре распределения нормальных напряжений видно, что максимальное напряжение возникает на поверхности.

Подставим в формулу напряжения значение

$$y = y_{\text{max}}$$

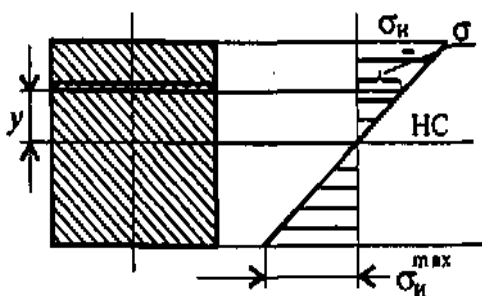


Рисунок 116.

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_{\text{н}} y_{\text{max}}}{J_x}.$$

Получим:

$$W_x: W_x = \frac{J_x}{y_{\text{max}}}$$

Отношение  $\frac{J_x}{y_{\text{max}}}$  принято обозначать

Эта величина называется *моментом сопротивления* сечения при изгибе, или осевым моментом сопротивления.

Размерность - мм<sup>3</sup>.

$W_x$  характеризует влияние формы и размеров сечения на прочность при изгибе.

### Рациональные сечения при изгибе

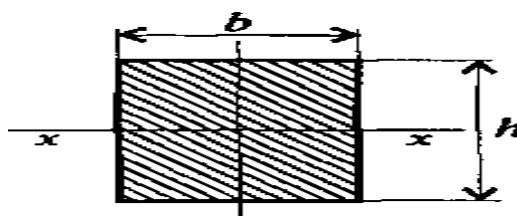
$$\sigma_{и}^{max} = \frac{M_{и}}{W_x}$$

Определим рациональные сечения при изгибе, для этого сравним моменты сопротивления простейших сечений.

Осей момент инерции прямоугольника (рис.117) равен

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

Рисунок 117.



Осей момент сопротивления прямоугольника:

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

Сравним сопротивление изгибу двух прямоугольных сечений (рис.118).

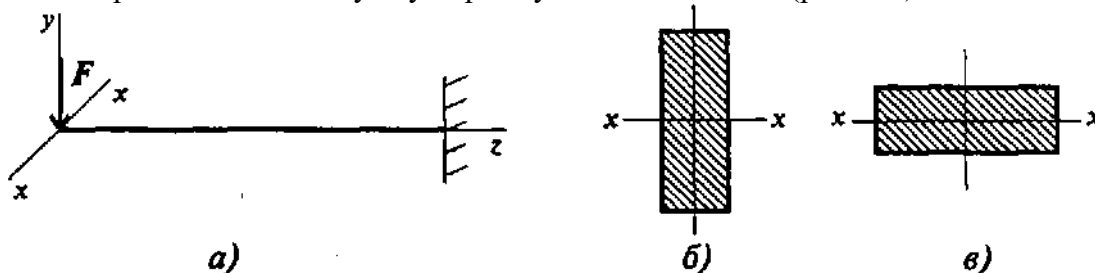


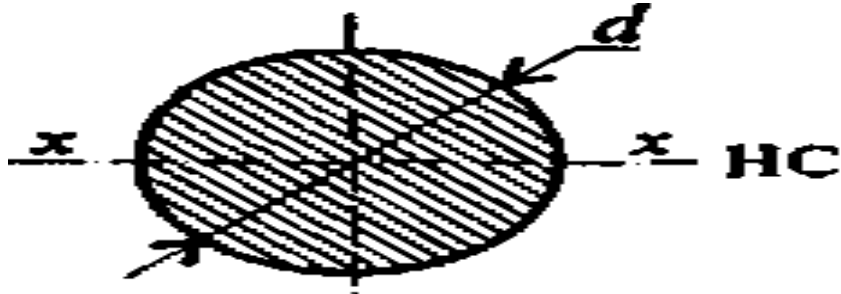
Рисунок 118.

Осей момент инерции круга равен:

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

Осей момент сопротивления круга

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$



*Рисунок 119.*

Все необходимые расчетные данные (площади, моменты инерции и сопротивления) стандартных сечений приводятся в таблицах стандартов. Для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, выбирают сечения, симметричные относительно оси, вокруг которой совершается изгиб.

***Расчет на прочность при изгибе***

Рассчитать на прочность - это значит определить напряжение и сравнить его с допустимым.

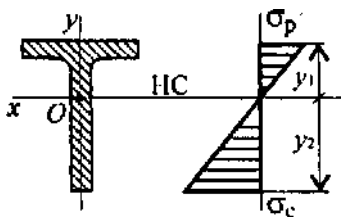
Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{и}^{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_{и}],$$

где  $[\sigma_n]$  — допускаемое напряжение.

По этому неравенству проводят *проверочные расчеты* после окончания конструирования балки.

Для балок из хрупких материалов расчеты ведут по растянутой и сжатой зоне одновременно (рис.120.).



$$\sigma_p^{\max} = \frac{M_x y_1}{J_x} \leq [\sigma_p];$$

$$\sigma_c^{\max} = \frac{M_x y_2}{J_x} \leq [\sigma_c].$$

Рисунок 120.

При *проектировочном расчете* определяют требуемые размеры поперечных сечений балки или подбирают материал.

Схема нагружения и действующие нагрузки известны.

По условию прочности можно определить нагрузочную способность балки  $[M_{II}] = W_p[\sigma]$ .

**Формула Журавского** позволяет определить касательные напряжения при изгибе, возникающие в точках поперечного сечения балки, находящиеся на расстоянии от нейтральной оси  $x$ .

Вырежем из балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 7.10, а) элемент длиной  $dz$  и дополнительным продольным сечением рассечем на две части (рис. 14.1 б).

Рассмотрим равновесие верхней части: из-за отличия изгибающих моментов возникают разные сжимающие напряжения. Чтобы эта часть балки находилась в равновесии ( $\sum Z = 0$ ) в ее продольном сечении должна возникнуть касательная сила  $dT$ . Уравнение равновесия части балки:

$$\sum Z = \int_{F_{отс}} \sigma_{z1} dF - \int_{F_{отс}} (\sigma_{z1} + d\sigma_{z1}) dF + dT = 0$$

Отсюда

$$dT = \int_{F_{отс}} d\sigma_{z1} dF = \int_{F_{отс}} \frac{dM_x}{I_x} y_1 dF = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{отс}$$

где интегрирование ведется только по отсеченной части площади поперечного сечения

$$S_x^{отс} = \int_{F_{отс}} y_1 dF$$

балки  $F_{отс}$  (на рис. 121, в заштрихована), — статический момент инерции отсеченной (заштрихованной) части площади поперечного сечения относительно нейтральной оси  $x$ .

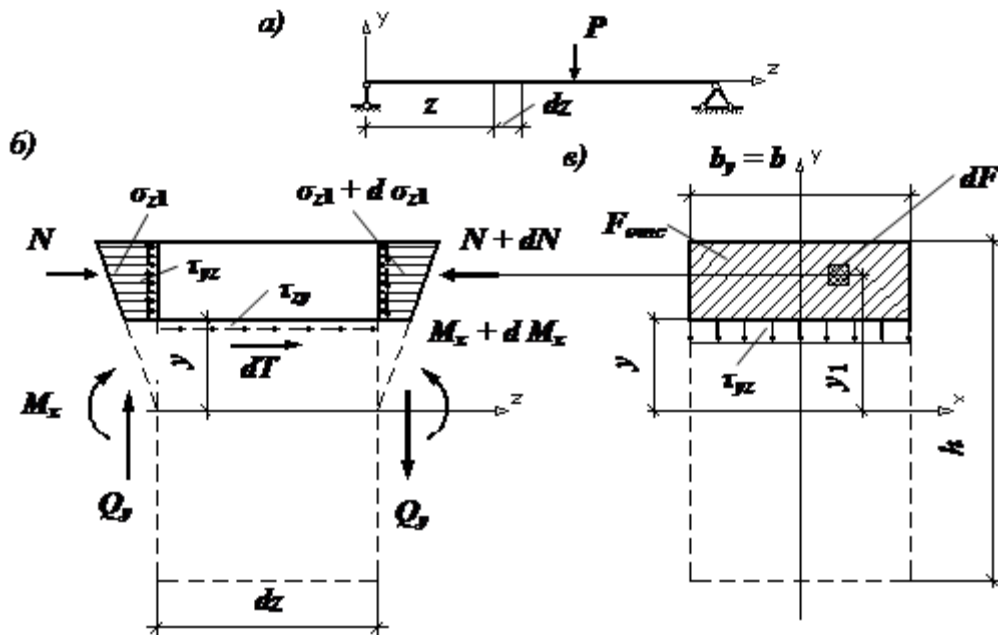


Рис.121 Касательные напряжения при изгибе балки.

Предположим: касательные напряжения ( $\tau_{yz}$ ), возникающие в продольном сечении балки, равномерно распределены по ее ширине ( $b_y$ ) в месте сечения:

$$dT = \tau_{yz} b_y dz$$

Получим выражение для касательных напряжений:

$$\tau_{yz} = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^{омс}}{I_x b_y}$$

$dM_x/dz = Q_y$ , а  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , тогда формула касательных напряжений ( $\tau_{zy}$ ), возникающих в точках поперечного сечения балки, находящихся на расстоянии  $y$  от нейтральной оси  $x$ :

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{омс}}{I_x b_y}$$

- формула Журавского

Формула Журавского получена в 1855 г. Д.И. Журавским, поэтому носит его имя.

**Упругая линия балки.**

Изогнутая под действием нагрузок ось балки представляет собой плавную кривую, которая называется **упругой линией**. Деформация балки при изгибе характеризуется **прогибом**  $y$  и **углом поворота поперечного сечения**, который равен углу  $\alpha$  наклона касательной к упругой линии по отношению к оси  $z$  балки. Уравнения прогибов и углов поворота сечений в общем виде записываются в виде  $y = f(z)$ ,  $\alpha = f_2(z)$  •

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Из математики известно, что радиус кривизны кривой  $y = f(z)$ ,

в любой точке определяется по формуле  $\rho = [1 + (y')^2]^{3/2} / y''$ , где

$$y' = \frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \alpha, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dz^2}.$$

Ввиду малости деформаций пренебрегаем величиной  $(y')^2$  (так как она значительно меньше единицы) и тогда  $\rho \approx 1 / y''$ . Ранее мы вывели

$$\frac{EI}{\rho} = M_{\text{н}}$$

формулу  $\rho$ ; подставляя в нее полученное приближенное значение радиуса кривизны, имеем дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$EI y'' = M_{\text{н}}.$$

Чтобы получить уравнение углов поворота сечений  $\alpha = \alpha(z)$ , надо это уравнение проинтегрировать один раз, причем ввиду малости деформаций будем считать, что  $y' = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ , рад. Чтобы получить уравнение прогибов  $y = f_i(z)$ , надо это же уравнение проинтегрировать дважды.

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально-техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

#### 5. Литература:

##### 5. Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б.Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусеитов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг

2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5В072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

### 6. Контрольные вопросы

1. Какую плоскость называют силовой?
2. Какой изгиб называют прямым? Что такое косой изгиб?
3. Какие силовые факторы возникают в сечении балки при чистом изгибе?
4. Какие силовые факторы возникают в сечении при поперечном изгибе?
5. Определите реакцию в опоре *B*?

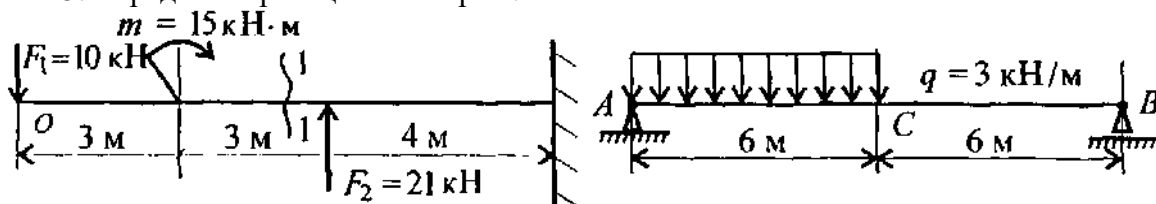


Рисунок 112.

6. Определите величину поперечной силы и изгибающего момента в сечении *C*, используя схему балки (рис. 112)?
7. Определите участок чистого изгиба (рис. 113)?

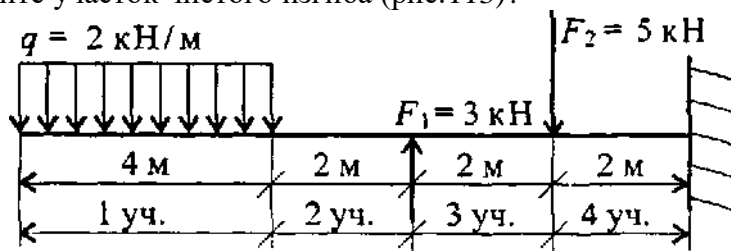


Рисунок 113.

8. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении балки при чистом и поперечном изгибах?
9. Почему при поперечном изгибе в продольных сечениях балки возникают касательные напряжения?



10. Каким опытом можно подтвердить возникновение касательных напряжений в продольных сечениях балки?

11. В какой точке поперечного сечения (рис.1) касательные напряжения при поперечном изгибе максимальны?

Варианты ответов:

1. А.2. В.3. С. 4. D.

12. Выберите верную эпюру распределения нормальных напряжений при изгибе (рис.2).

Напишите формулу для расчета нормальных напряжений при изгибе. Изгибающий момент действует в вертикальной плоскости.

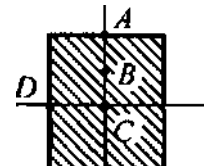


Рис. 1

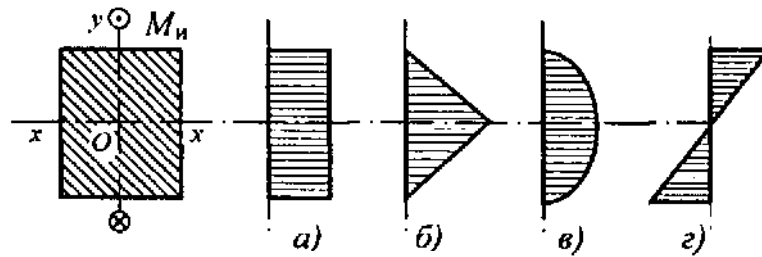


Рис. 2

13. Как изменится максимальное нормальное напряжение в сечении (рис.3,а), если балку прямоугольного сечения положить плашмя (рис. 3,б)?  $b = 20$  мм;  $h = 100$  мм.

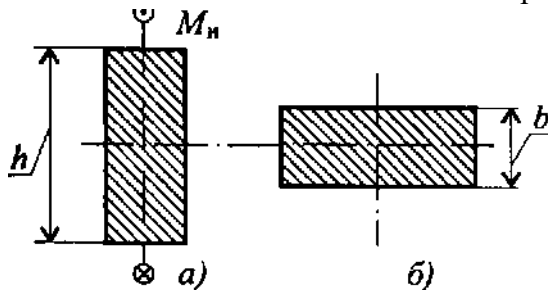


Рис. 10

7. Во сколько раз увеличится прогиб балки, если распределенную по всей длине нагрузку заменить сосредоточенной, приложенной в середине пролета? Использовать формулы для определения прогибов, приведенные в таблице 1.

### Лекция № 15

**1.Тема:** Сложное сопротивление. Виды сложных деформаций. Устойчивость сжатых стержней.

**2. Цель:** Освоить теоретический материал для решения практических задач.

**3. Тезисы лекции:**

**План лекции:**

1.Косой изгиб. Внецентренное растяжение или сжатие стержней.

2.Изгиб с кручением стержней с различным поперечным сечением.

3.Продольный изгиб. Общие сведения. Критическая сила. Формула Эйлера. Формула Ясинского.

Если *силовая плоскость* совпадает с *главной* плоскостью бруса, изгиб называют *прямым* (рис.108).

Если силовая плоскость не проходит через главную плоскость бруса, изгиб называют *косым изгибом* (рис.15.1).

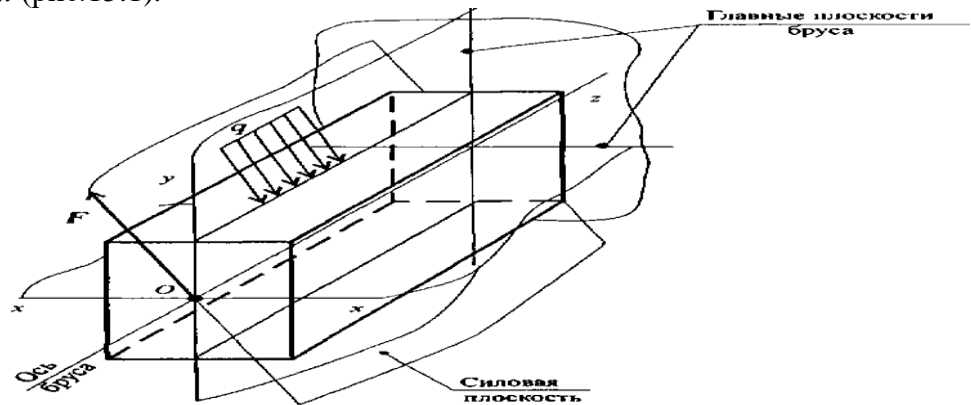


Рисунок 15.1

Внецентренное растяжение или сжатие стержней.  
 Весьма часто продольная нагрузка бывает приложена не в центре

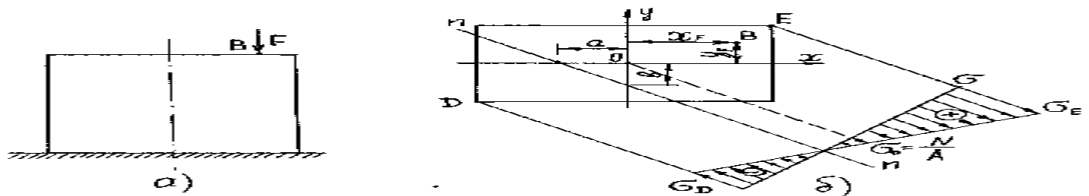


Рисунок 15.2

тяжести поперечного сечения стержня, а смещена с некоторым эксцентриситетом относительно главных осей сечения (рис.15.2, а).

Применим метод сечений, определим в любом поперечном сечении стержня продольную силу  $N=F$  и изгибающие моменты, равные относительно оси  $x$

$$M_x = F \cdot y_F = N \cdot y_F$$

и относительно оси  $y$

$$M_y = F \cdot x_F = N \cdot x_F .$$

Поэтому напряжение в любой точке поперечного сечения с координатами  $x$  и  $y$  будет определяться по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y} .$$

Для сечений имеющих выступающие угловые точки, экстремальные напряжения определяются по формуле:

ОҢТҰСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y},$$

где  $W_x$  и  $W_y$  - моменты сопротивления сечения относительно осей  $x$  и  $y$ .

Наибольшее положительное напряжение будет в точке E (рис.135, б), т.к. здесь суммируются растягивающие напряжение от центрального напряжения и растягивающие напряжения от изгиба в двух плоскостях:

$$\sigma_E = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}.$$

Наибольшее отрицательное напряжение будет в точке D:

$$\sigma_D = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}.$$

При этом они могут получиться как растягивающими, так и сжимающими. Условие прочности по растягивающим напряжениям:

$$\sigma_P = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_P].$$

Если точка приложения силы находится на одной из главных осей сечения, например на осю, то предыдущая формула упрощается:

$$\sigma_P = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_P].$$

При произвольной форме сечения для определения положения опасных точек необходимо найти положение нулевой линии. Уравнение нулевой линии получим, приравняв напряжение нулю:

$$\frac{N}{A} + \frac{N \cdot y_F \cdot y_0}{J_x} + \frac{N \cdot x_F \cdot x_0}{J_y} = 0,$$

где  $x_0$  и  $y_0$  – текущие координаты точек нулевой линии.

Введем обозначение:  $i_x^2 = J_x / A$ ;  $i_y^2 = J_y / A$ .

Величины  $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}$ ;  $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$  называются радиусами инерции сечения

относительно осей  $x$  и  $y$ .

$$\frac{N}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_0}{i_y^2} + \frac{y_F y_0}{i_x^2} \right) = 0.$$

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казakhstanская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Так как  $\frac{N}{A} \neq 0$ , то  $\frac{x_F x_0}{i_y^2} + \frac{y_F y_0}{i_x^2} + 1 = 0$ .

Это и будет уравнение нулевой линии.  $E = 0$  можно представить в виде уравнения прямой в отрезках:

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1,$$

где  $a = -\frac{i_y^2}{x_F}$ ,  $b = -\frac{i_x^2}{y_F}$  представляют собой отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях

х и у.

**Изгиб с кручением стержней с различным поперечным сечением.** При сложных деформациях в поперечных сечениях стержней действуют одновременно несколько составляющих внутренних сил, например, крутящий и изгибающий моменты, поперечная и продольная силы. Расчеты на прочность в этом случае основаны на принципе независимости действия сил с применением выбранной теории прочности. Выбор гипотезы прочности определяется прежде всего состоянием материала – пластическим или хрупким.

Решают такие задачи в следующем порядке. Сначала в поперечных сечениях стержня определяют с помощью метода сечений внутренние силы. Для определения положения опасного сечения необходимо построить эпюры внутренних сил. Далее определяют нормальные и касательные напряжения от каждой составляющей внутренних сил. Анализируя распределение напряжений по длине стержня, определяют наиболее нагруженное сечение и наиболее нагруженную точку. Для нее составляют условие прочности с привлечением используемой гипотезы прочности.

Деформации изгиба с кручением подвергаются валы различных передаточных механизмов. Расчет валов на прочность при действии указанных деформаций называют расчетом на статическую прочность по наибольшим усилиям.

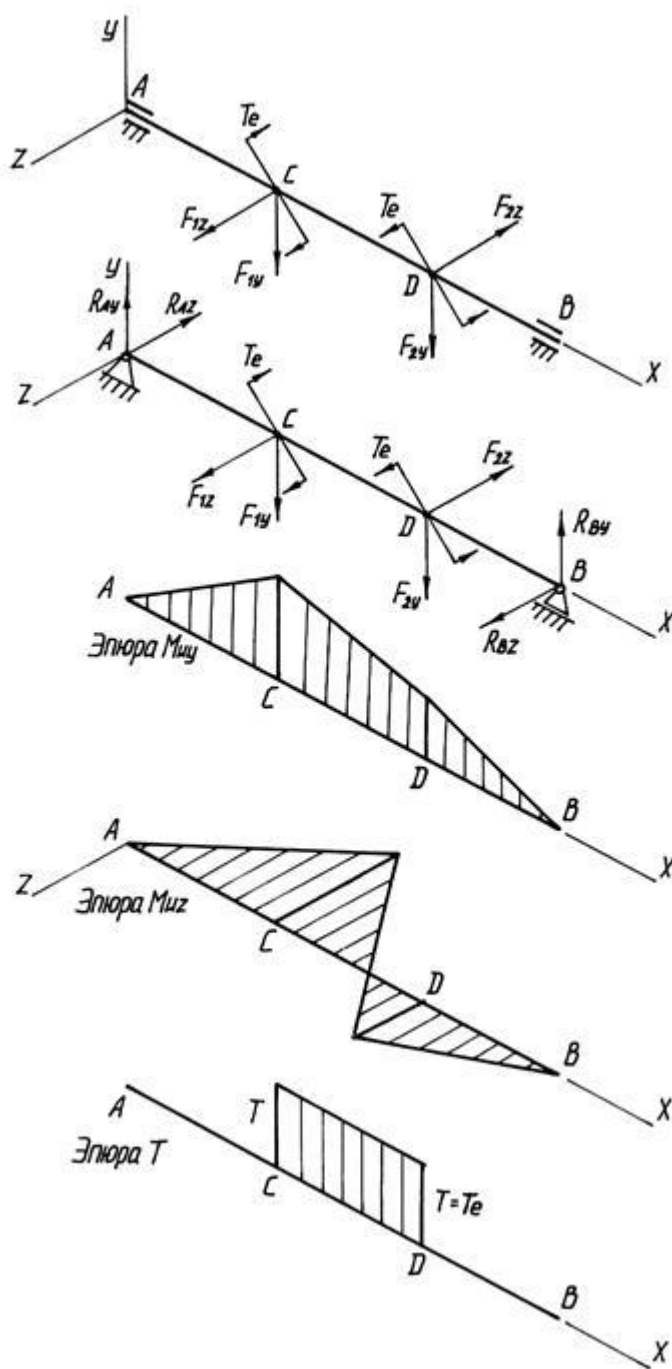


Рис.15.3

На рис. 15.3, а показана схема нагружения, действующая на двухопорный вал. Для удобства расчета пространственную систему внешних сил представляют в виде сил, вызывающих одновременно изгиб в вертикальной ( $F_{1y}$ ,  $F_{2y}$ ) и горизонтальной ( $F_{1z}$ ,  $F_{2z}$ ) плоскостях. Вал принимается за статически определимый стержень (рис. 15.3, б).

ОҢТҰСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

Соответственно реакции опор определяют в виде составляющих, действующих в вертикальной ( $R_{AY}, R_{BY}$ ) и горизонтальной ( $R_{AZ}, R_{BZ}$ ) плоскостях.

На участке вала **CD** в поперечных сечениях действует крутящий момент **T**, равный внешним скручивающим моментам  $T_e$ . Под действием приложенной нагрузки в сечениях возникают нормальные от изгиба и касательные от изгиба и кручения напряжения. Величиной касательных напряжений от изгиба пренебрегают, так как она незначительна по сравнению с величиной касательных напряжений от кручения. Используя принцип независимости действия сил, строим эпюры изгибающих моментов от вертикальных (рис. 15.3, в) и горизонтальных сил (рис. 15.3, г), а также эпюру крутящих моментов (рис. 15.3, д). Сравнивая построенные эпюры, видим, что наиболее опасным является сечение, проходящее через точку **C**. В этом поперечном сечении помимо крутящего действует и изгибающий момент, величина которого определяется как

$$M_{из} = \sqrt{M_{изу}^2 + M_{изz}^2}$$

Известно, что максимальные нормальные напряжения при изгибе будут в

крайних волокнах и равны  $\sigma = M_{из} / W = \sqrt{M_{изу}^2 + M_{изz}^2} / W$ , где  $W \approx 0,1d^3$  – осевой момент сопротивления сечения в виде круга диаметром **d**. Наибольшие касательные напряжения при кручении возникают в наиболее удаленных от центра точках сечения и определяются как  $\tau = T/W_p = T/(2W)$ , где  $W_p$  – полярный момент сопротивления сечения, для круга  $W_p \approx 0,2d^3$ . Подставляя значения  $\sigma$  и  $\tau$  в запишем соответственно условия прочности вала при использовании третьей и четвертой гипотез прочности:

$$\sigma_{ред} = \sqrt{M_{из}^2 + T^2} / W \leq \sigma_{adm} \quad (5.86)$$

$$\text{или } \sigma_{ред} = \sqrt{M_{из}^2 + 0,75T^2} / W \leq \sigma_{adm} \quad (5.87)$$

где  $\sigma_{adm}$  – допускаемое напряжение материала вала при растяжении. Из выражений (5. 86) и (5.87) можно найти значение осевого момента сопротивления **W** поперечного сечения вала

как  $W \geq \sqrt{M_{из}^2 + T^2} / \sigma_{adm}$  или  $W \geq \sqrt{M_{из}^2 + 0,75T^2} / \sigma_{adm}$  и далее величину диаметра вала  $d \geq \sqrt[3]{W/0,1}$ .

Поперечный изгиб. Рассмотрим изгиб балки, защемленной справа и нагруженной сосредоточенной силой **F**(рис.15.4.).

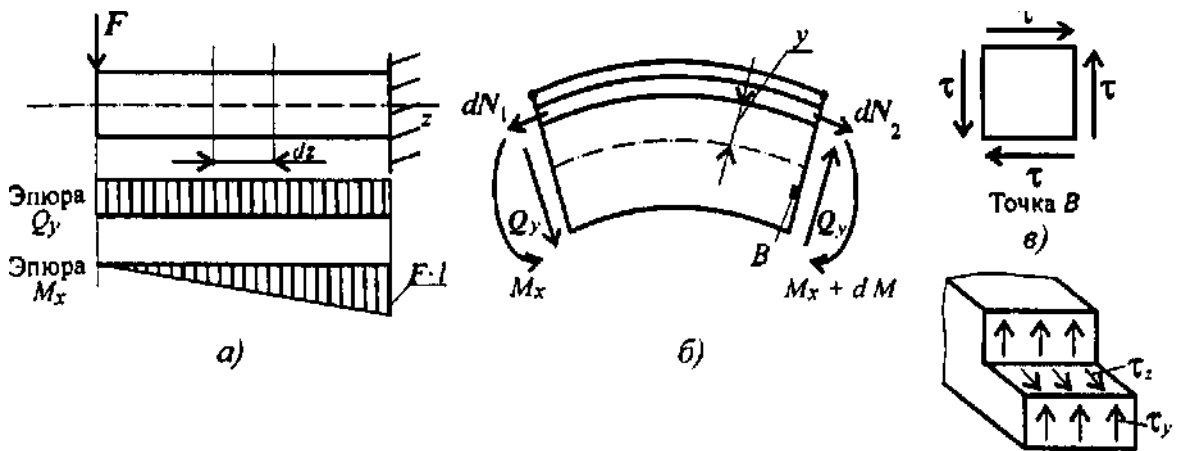


Рисунок 15.4.

В поперечном сечении возникает изгибающий момент, меняющийся по длине балки, и постоянная поперечная сила  $Q$ .

Рассмотрим участок балки длиной  $dz$  (рис. 15.4, б).

Изгибающий момент, как известно, является равнодействующим элементарных моментов, возникающих в результате действия продольных сил упругости. Связь между нормальными напряжениями в точках поперечного сечения и изгибающим моментом уже рассматривалась:

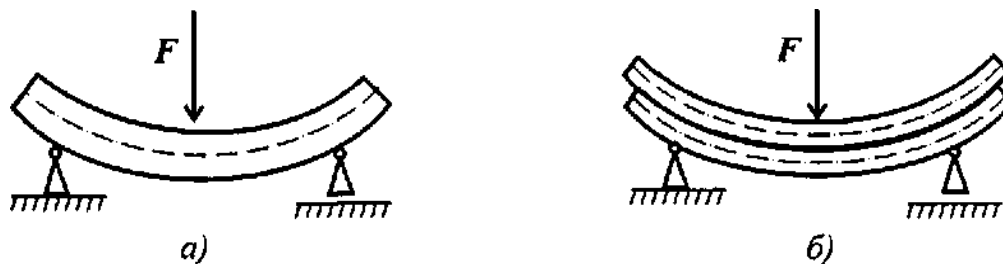
$$M_x = \int_A \sigma_n y dA.$$

Поперечная сила представляет собой равнодействующую касательных сил упругости, возникающих в поперечных сечениях (рис. 47, в), и связана с касательными напряжениями зависимостью

$$Q_y = \int \tau dA.$$

В силу парности касательных напряжений в продольных сечениях балок, параллельных нейтральному слою, возникают такие же по величине касательные напряжения (рис. 15.4, г).

Появление касательных напряжений в продольных слоях балок подтверждается следующим опытом. Рассмотрим поперечный изгиб двух балок, одна - цельная, другая -



ОҢТҰСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

составленная из нескольких положенных друг на друга слоев (рис.15.5). Цельная балка изогнется (рис.15.5,а), брусья второй балки сдвинутся (рис.15.5,б). Каждый из брусьев деформируется независимо. В цельной балке сдвигу слоев препятствуют возникающие касательные напряжения.

Рисунок 15.5.

На поверхности касательные напряжения равны нулю. Формула для расчета касательных напряжений для балки квадратного сечения была получена в 1855 году русским инженером Д. И. Журавским,

$$\tau = \frac{Q_y S_x}{J_x b},$$

где  $Q_y$  - поперечная сила в сечении;  $S_x$  - статический момент отсеченной части относительно оси  $x$ ,  $A_{отс}$  - площадь поперечного сечения отсеченной части (рис.126.);  $J_x$  - момент инерции сечения;  $b$  - ширина балки.

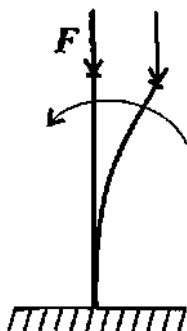
#### Устойчивость

#### сжатых

#### стержней.

#### Понятие об устойчивом и неустойчивом равновесии

Относительно короткие и массивные стержни рассчитывают на сжатие, так как они выходят из строя в результате разрушения или остаточных деформаций. Длинные стержни небольшого поперечного сечения под действием осевых сжимающих сил изгибаются и теряют равновесие. Такие стержни работают на изгиб и сжатие.



Равновесие считают устойчивым, если за счет сил упругости после снятия внешней отклоняющей силы стержень восстановит первоначальную форму (рис.15.6).

Если упругое тело после отклонения от равновесного положения не возвращается к исходному состоянию, то говорят, что произошла потеря устойчивости, а равновесие было неустойчивым.

Рисунок 15.6

Потерю устойчивости под действием центрально приложенной продольной сжимающей силы называют *продольным изгибом*.

На устойчивость равновесия влияет величина сжимающей силы.

Наибольшее значение сжимающей силы, при которой прямолинейная форма стержня сохраняет устойчивость, называют *критической силой*. Даже при небольшом превышении критического значения силы стержень недопустимо деформируется и разрушается.

#### Расчет на устойчивость

Расчет на устойчивость заключается в определении допускаемой сжимающей силы и в сравнении с ней силы действующей:



ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA          AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL          ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин	76/11 2024-2025 1 стр. из 117

$$F \leq [F]; \quad [F] = \frac{F_{кр}}{[s_y]}; \quad F \leq \frac{F_{кр}}{[s_y]},$$

где  $F$ — действующая сжимающая сила;

$[F]$  — допускаемая сжимающая сила, обеспечивает некоторый запас устойчивости;

$F_{кр}$ — критическая сила;

$[s_y]$  — допускаемый коэффициент запаса устойчивости.

Обычно для сталей  $[s_y] = 1,8 \div 3$ ; для чугуна  $[s_y] = 5$ ; для дерева  $[s_y] = 2,8$ .

### Способы определения критической силы

#### Расчет по формуле Эйлера

Задачу определения критической силы математически решил Л. Эйлер в 1744 г.

Для шарнирно закрепленного с обеих сторон стержня (рис.15.7) формула Эйлера имеет

вид:



$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2},$$

Рисунок 15.7

где  $E$ - модуль упругости;

$J_{\min}$ - минимальный осевой момент инерции стержня;

$L$  -длина стержня.

Потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости, поэтому в формулу входит минимальный из осевых моментов инерции сечения ( $J_x$  или  $J_y$ ).

Формулу распространили на другие формы закрепления стержней, рассмотрев форму потери устойчивости в каждом случае.

Длина стержня заменяется ее приведенным значением, учитывающим форму потери устойчивости в каждом случае:  $l_{прив} = \mu l$ , где  $\mu$ - коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления стержня (рис.15.8).

Формула для расчета критической силы для всех случаев

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2}$$

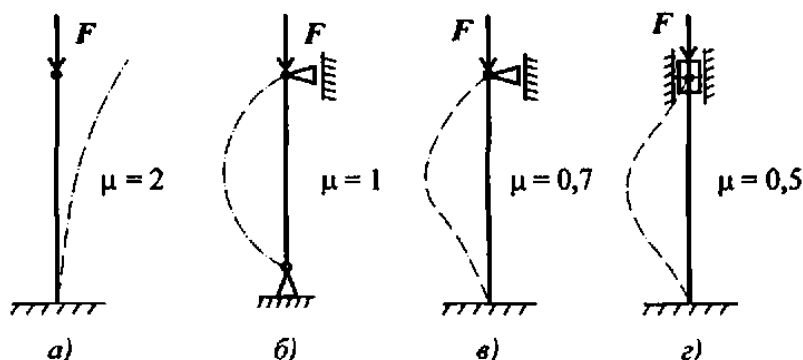


Рисунок 15.8

### Критические напряжения

Критическое напряжение - напряжение сжатия, соответствующее критической силе. Напряжение от сжимающей силы определяется по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2 A},$$

где  $\sigma_{кр}$  - напряжение сжатия, при котором стержень еще устойчив. Корень квадратный из отношения минимального момента инерции сечения к площади поперечного сечения принято называть *минимальным радиусом инерции*  $i_{min}$ :

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}; \quad \frac{J_{min}}{A} = i_{min}^2$$

Тогда формула для расчета критического напряжения переписывается в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2}$$

Отношение  $\mu l / i_{min}$  носит название *гибкости стержня*  $\lambda$ . Гибкость стержня - величина безразмерная, чем больше гибкость, тем меньше напряжение:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}; \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Заметим, что гибкость не зависит от материала, а определяется только геометрией стержня.

### Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера выполняется только в пределах упругих деформаций.

Таким образом, критическое напряжение должно быть меньше предела упругости материала.

Предел упругости при расчетах можно заменять пределом пропорциональности. Таким образом,  $\sigma_{кр} \leq \sigma_y \approx \sigma_{пц}$ , где  $\sigma_y$  - предел упругости;  $\sigma_{пц}$  - предел пропорциональности материала;

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}. \quad \text{Откуда гибкость стержня: } \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}};$$

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} \quad \text{— предельная гибкость.}$$

Предельная гибкость зависит от материала стержня.

В случае, если  $\lambda < \lambda_{пред}$  в материале стержня возникают остаточные деформации. Поскольку в реальных конструкциях могут возникать пластические деформации, не приводящие к потере работоспособности, созданы эмпирические формулы для расчетов в этих случаях.

*Расчет критического напряжения по формуле Ф. О. Ясинского для стальных стержней*

Таблица 15. 1

Материал	a, МПа	b, МПа	$\lambda_0$	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20, Ст4	328	1, 15	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Дюралюмин Д16Т	406	1, 83	30	53
Сосна, ель	29,3	0,194	—	70

Критическое напряжение определяется по формуле  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ , где a и b — коэффициенты, зависящие от материала; их значения представлены в таблице.

На рис. 15.9 представлена зависимость критического напряжения от гибкости стержня.

Для стержней малой гибкости проводится расчет на сжатие  $\bar{\sigma}_{сж} \leq [\bar{\sigma}]_{сж}$ .

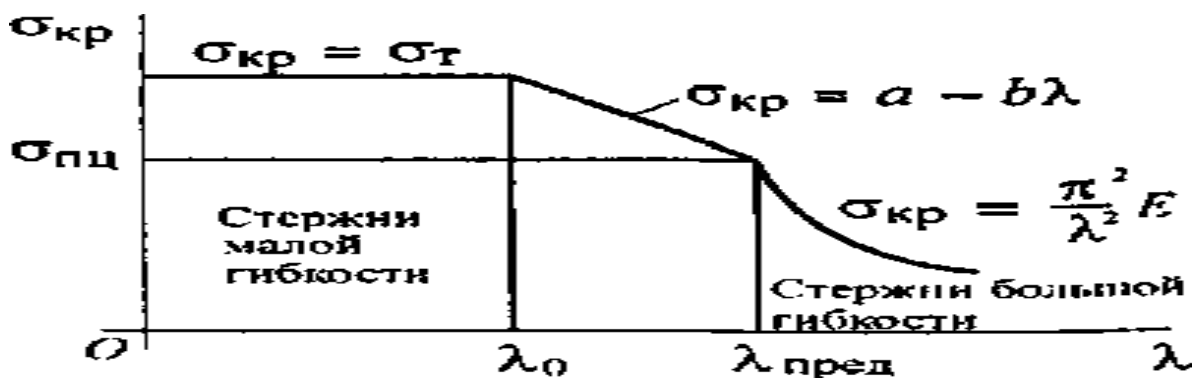


Рисунок 15.9

Для стержней средней гибкости расчет проводят по формуле Ясинского  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ .  
 Для стержней большой гибкости расчет проводят по формуле Эйлера  $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2$ .

Критическую силу при расчете критического напряжения по формуле Ясинского можно определить как

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = (a - b\lambda) A.$$

Условие устойчивости:  $F \leq \frac{F_{кр}}{[s_y]}$ .

**4.Иллюстративный материал:** Для проведения занятия используется следующее материально- техническое обеспечение: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

### 5.Литература

Основная литература:

1. Арапов, Б. Р. Теориялық және инженерлік механика негіздері [Мәтін] : оқулық / Б. Р. Арапов. - Қарағанды : Medet Group, 2020. - 232 бет. с.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова. - 51-е изд., стер ; 2012

Дополнительная литература:

1. Мардонов, Б. М. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов : сборник / Б. М. Мардонов, М. З. Эргашов, М. Е. Баймиров. . - Алматы : Эверо, 2014. - 256 с
2. Хиббелер, Р. Ч. Статика мен материалдар механикасы : т.1 : оқулық / Р.Ч. Хиббелер ; Қаз.тіл.ауд. Е.Б.Даусейтов, С.Жүнісбеков. - 4-басылым. - Алматы : ЖШС РПБК "Дәуір", 2017. - 436 б. с

Электронные ресурсы:

ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН <b>MEDISINA</b> <b>AKADEMIASY</b> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 <b>SKMA</b> -1979-	SOUTH KAZAKHSTAN <b>MEDICAL</b> <b>ACADEMY</b> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра инженерных дисциплин		76/11 2024-2025 1 стр. из 117

1. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM). - 00. Тг
2. Теориялық және қолданбалы механика [Электронный ресурс] : оқулық / А. Түсіпов, Қ. Түсіпов. - Электрон. текстовые дан. ( 118Мб). - Алматы : [б. и.], 2015. - эл. опт. диск (CD-ROM).<https://aknurpress.kz/login>
3. Қолданбалы механика. Утебаев М.Н., Айсаев С.У., Суйеуова Н.Б. , 180 бет 2019. <https://www.aknurpress.kz/reader/web/2121>
4. Теориялық және қолданбалы механика: 5B072000-"Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" мамандығының бакалавриат студенттеріне арналған курстық жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау. - Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2015. - 56б.<http://rmebrk.kz/>
5. Механика: жалпы физикалық практикум / С. И. Исатаев, Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова ; ред. К. Сәбит; әл-Фараби атын. ҚазҰУ. - Түзет., толықт. 2-бас. - Алматы : Қазақ ун-ті, 2015. - 217, [1] б <http://elib.kaznu.kz>

#### **6.Контрольные вопросы**

1. В каких случаях возникает внецентренная деформация?
- 2.В каких точках поперечного сечения стержня возникают величины наибольших напряжений и каким образом они вычисляются при внецентренном растяжении или сжатии?
- 3.Какая линия называется нейтральной линией и что она делает с площадью поперечного сечения стержня?
4. Какова величина напряжения на нейтральной линии?
5. Какой квадрант пересекает нейтральная линия в поперечном сечении по отношению к точке приложения внешней нагрузки?
6. Каким образом определяется положение нейтральной линии?
- 7.Из какого выражения определяется величина радиуса инерции поперечного сечения относительно центральных осей?
- 8.Какое равновесие называется устойчивым?
- 9.Какие брусья следует рассчитывать на устойчивость?
- 10.Какую силу при расчете на устойчивость называют критической?
- 11.Напишите формулу Эйлера для расчета критической силы и назовите входящие величины и их единицы измерения?