ДӘРІС КЕШЕНІ

Пән: **«Химия-технологиялық процестерді модельдеу»**

Пән коды: **НТРМ 3301**

БББ атауы: **6В0720100 - Фармацевтикалық өндіріс технологиясы**

Оқу сағатының көлемі/(кредит): **180 сағат/ (6 кредит)**

Оқытылатын курс пен семестр: **3курс, 5 семестр**

Дәріс көлемі **12 сағат**

Шымкент, 2024

Дәріс кешені «Фармацевттік өндірістің технологиясы» пәнінің жұмыс бағдарламасына (силлабус) сәйкес әзірленген және кафедра мәжілісінде талқыланды.

Хаттама №___ «___» ______________ 2024 ж.

Каф. меңгерушісі, к.т.н.доцент Орымбетова Г.Э.

Лекция 1 Кіріспе

Мақсаты: лекцияда біз келесі проблемалар мен мәселелерді қарастыру: идентификаттау әдістерінің дамуы мен қалыптасуы туралы қысқаша анықтама; модельдеудің философиялық аспекттілері; басқару үрдістеріндегі идентификаттау; модельдер мен оларды құру әдістері туралы негізгі түсініктер; нақтылы объектпен салыстырғанда модельді қарапайымдаудан бастарту мүмкін еместігі; модельдеу мақсаты үшін маңызды болатын объекттің қасиеттерін бейнелеу; адекваттылық және модель адекваттылығының критерийлері.

Тезистер

Жүйе сипаттамаларын идентификаттау мәселесін жүйені басқару мәселесіне қатысты дуальды ретінде қарастыруға болады. Жүйе алдын ала немесе басқару барысында идентификатталмаған болса оны басқару мүмкін емес.

Бұл пәнде идентификаттау модельдерін берудің түрлі формаларына негізделген идентификаттаудың түрлі әдістері қарастырылады (мысалы, дифференциалды теңдеулер, айырымдық теңдеулер, беріліс функциялар, градиенттік өрнектер және с.с.).

Қарастырылатын әдістердің бірде біреу жүйелердің барлық түрлерін идентификаттау үшін жарамайды. Олардың әрқайсысының өз пайдалану аясы бар.

Идентификаттау теориясы басқару теориясына баламалы, дәлірек айтқанда, дуальды. Басқару теориясында басқару қателіктері (жүйе идентификатталған) келесі басқару үрдісін жақсарту үшін пайдаланылады.

Жалпы айтқанда, олар үшін зерттеулердің түрлі әдістері қажет болатын бірнеше жағдайларды ажыратады. Біріншіден, сызықты және бейсызықты жүйелерді ажыратады, сонымен қатар сызықты жүйелерді идентификаттау жеңілдеу, себебі олар суперпозиция қасиетіне ие. Екіншіден, стационарлы және стационарлы емес жүйелер (соңғысының қатарына уақыт барысында параметрлері өзгеретінжүйелер жатады). Үшіншіден, көп жағдайда жүйелер дискретті және үздіксіз болып жіктеледі. Жіктеудің төртінші нұсқасы бір немесе бірнеше кіріс әсерлері бар жүйелер үшін идентификаттау әдістерін ажыратады. Жіктеудің бесінші нұсқасы детерминді немесе стохастикалық үрдістерді идентификаттау мүмкіндігін көздейді. Жіктеудің алтыншы, ең маңызды, бырақ жүзеге асыруы қиын нұсқасы – жүйе туралы априорлы ақпараттың болуына тәуелді идентификаттау әдістерін жіктеу. Идентификаттаудың кез келген әдісінде қалып-күй векторының өлшемі және ішкі байланыстардың немесе бейсызықтық табиғаты туралы білім маңызды.

Идентификаттау әдістерінің дамуы мен қалыптасуы туралы қысқаша анықтама

Математикалық модельдер адамның қоршаған әдемдегі құбылыстарын тануға арналған негізгі аспаптарының бірі болып табылады. Математикалық модельдер деп зерттелетін құбылысқа тән негізгі тәуелділіктер мен байланыстарды түсінеді. Олар формулалар немесе теңдеулер, математикалық формада бейнеленген ережелер немесе келісімдер жиынтығы болуы мүмкін. Ежелгі заманнан бері математикада, механикада, физикада және басқа да жаратылыстанудың дәл ғылымдарында зерттелетін құбылыстарды сипаттау үшін математикалық модельдер пайдаланған. Сондай ақ, Ньютон заңдары планеталардың Күн айналасында қозғалу өаңдылықтарын толығымен анықтайды. Механиканың негізгі заңдарын пайдаланып ғарыш аппаратының, мысалы, Жерден Айға қарай қозғалысын сипаттайтын теңдеулерді құру қиын емес. Бырақ, олардың шешімін қарапайым формулалар түрінде алу мүмкін емес. Ғарыш аппараттарының траекторияларын есептеу үшін компьютерлер пайдаланылады.

Модель құрамына анықталуы тиіс болатын коптеген шамалар кіреді, ал ол шамалардың өздері көптеген айнымалы және тұрақты параметрлерге тәуелді.

Нақтылы үрдістердің модельдері бейчызықты болып табылады. Классикалық математикалық физика аппараты сызықты модельдермен жұмыс істеуге бейімделген. Бырақ, бейсызықты модельдерді шешу үшін суперпозициялау принципі жарамайды да жалпы шешімді құруға арналған алгоритмдер жоқ. Сондықтан, бейсызықты модельдер үшін аяқталған теориялық нәтижелер шамалы.

Математикалық модельдеу методлогиясын осы ғылымның негізін қалаушы академик А.А. Самарский қысқаша "модель - алгоритм - программа" деп тұжырымдаған. Бұл методлогия өз дамуын "есептеу эксперимент" түріндегі технологияда тапты. Ол табиғи эксперимент өте қымбат немесе күрделі болатын жағдайларда қоршаған әлемдегі құбылыстарды зерттеуге арналған ақпараттық технологиялардың бірі.

Есептеу эксперимент табиғи экспериментaлды қондырғыларға қарағанда кейбір мәселелерді зерттеу барысында алынған нәтижелерді жинақтап, ал одан кейін оларды мүлдем басқа саладағы мәселелерді шешу үшін жылдам және икемді пайдалануға мүмкіндік береді. Бұл қасиетке қолданыстағы әмбебап математикалық модельдер ие. Мысалы, бейсызықты жылу өткізу теңдеуі тек жылу үрдістерін ғана емес, ал сонымен қатар зат диффузиясын, жер астындағы сулардың қозғалысын, ұсақ құыстары бар орталардағы газдың фильтрациясын сипаттау үшін де лайықты. Тек осы теңдеуге кіретін шамалардың физикалық мағынасы ғана өзгереді.

Модельдеудің философиялық аспекттері

Қазіргі кезде модельдеу әдістері пайдаланылмайтын адам тіршілігінің саласын атауға болмайды. Әсіресе бұл алынған ақпараттың негізінде шешімдерді қабылдау үрдістері негізгі болып табылатын түрлі жүйелерді басқару саласына қатысты. Модельдеудің философиялық аспекттеріне, ал дәлірек айтқанда модельдеудің жалпы теориясына тоқтайық.

Модельдеудің методлогиялық негізі. Адам тіршілігі бағытталған барлық нәрсе объект деп аталады (лат. objection — предмет, зат, нәрсе). Методологияны құру біздің сана-сезімізден тыс бар болатын, өзара және қоршаған ортамен өзара әрекеттесетін объекттер туралы ақпаратты алу және өңдеуді реттеуге бағытталған.

Ғылыми зерттеулерде үлкен рольді гипотезалар, яғни, тәжірибелік деректерге, бақылауларға, болжамдарға негізделген белгілі бір жорамалдал атқарады. Ұсынылған гипотезаларды арнайы қойылған эксперимент барысында тез және толық тексеруге болады. Гипотезаларды тұжырымдау және дұрыстығын тексеру барысында пікір жасау әдісі ретінде аналогияның (ұқсастық, үйлестік) маңызы зор.

Аналогия деп екі объекттің кейбір жеке ұқсастығы туралы пікірді атайды, сонымен қатар ондай ұқсастық маңызды және маңызсыз болуы мүмкін. Ұқсастықтың (айырмашылықтың) маңыздылығы абстракциялау деңгейіне тәуелді және жалпы жағдайда жүргізілетін зертеудің соңғы мақсатына байланысты. Қазіргі заманғы ғылыми гипотеза әдетте тәжірибеде тексерілген ғылыми қағидалармен аналогия бойынша құрылады.

Нақтылы, оюъективті түрде бар болатын әлемді бейнелейтін **гипотезалар** мен **аналогиялар** көрнекілікке ие болуы немесе зерттеу үшін ыңғайлы логикалық схемаларға келтірілуі тиіс; ой-пікірлерді және логикалық құрылымдарды жеңілдететін немесе құбылыстардың табиғатын дәлдіктейтін эксперименттерді жүргізуге мүмкіндік беретін мұндай логикалық схемалар модельдер деп аталады. Басқа сөзбен айтқанда, модель (лат. modulus — мера) — ол оригиналдың кейбір қасиеттерін зерттеуді қамтамасыз ететін объект-оригиналдың объект-орынбасары.

Модельдеудің анықтамасы. Объект-модель арқылы объект-оригиналдың маңызды қасиеттері туралы ақпарат алу мақсатында бір объектті екінші объектпен алмастыру модельдеу деп аталады. Сонымен, модельдеуді объекттің моделімен эксперименттерді жүргізу арқылы сол объект туралы ақпарат алу үшін объектті модель арқылы бейнелеу ретінде анықталуы мүмкін. Бір объекттерді (оригиналдарды) басқа объекттермен (модельдермен) алмастыру және объекттердің қасиеттерін модельдерде зерттеу теориясы модельдеу теориясы деп аталады [5, 36, 46].

Егер модельдеу нәтижелері дәлелденсе және зерттелетін объекттерде өтетін үрдістерді болжау үшін негіз ретінде қызмет атқара алатын болса онда модель объектке адекватты деп айтады. Бұл кезде модельдің адекваттылығы модельдеу мақсаттары мен қабылданған критерийлерге тәуелді.

Жалпыланған түрде модельдеуді зерттелетін объект-оригинал екінші объект-модельмен кейбір сәйкестікте болатын, сонымен қатар, тану үрдісінің кейбір кезеңдерінде модель оригиналды алмастыра алатын жағдайдағы тану әдісі ретінде анықтауға болады. Осындай алмастыру орын алатын тану кезеңдері, сонымен қатар модель мен оригиналдың сәйкестік формалары әртүрлі болуы мүмкін:

1) модельдеу тану үрдісі ретінде – оның ішінде орын алатын құбылыстар туралы сыртқы ортадан келіп түсетін ақпаратты өңдеуді қамтиды, оның нәтижесінде сана-сезімде объекттерге сәйкес бейнелер пайда болады; 2) оригинал-жүйемен (бірінші жүйе) белгілі бір ұқсастық қатынастарымен байланысқан кейбір модель-жүйені (екінші жүйені) құрудан тұратын модельдеу.

Философия көз қарасынан модельдеу — табиғатты танудың тиімді құралы. Модельдеу үрдісі зерттелетін объекттің; оның алдына нақты мәселе қойылған зерттеушінің; қойылған мәселені шешу үшін қажет болатын және объект туралы ақпаратты алу үшін құрылатын модельдің бар болуын болжайды. Сонымен қатар, зерттеуші модельге қатысты экспериментатшы болып табылады, бырақ бұл жағдайда эксперимент нақтылы объектпен емес, ал оның моделімен жүргізіледі. Мұндай эксперимент инженер үшін ұйымдастыру-техникалық мәселелерді тікелей шешу аспабы болып табылады.

Басқару үрдістерінде идентификаттау

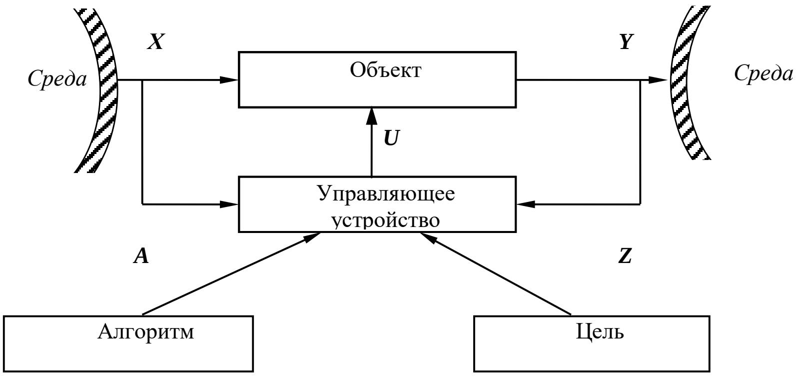
Басқарудың қазіргі заманғы теориясы мен практикасының ең маңызды мәселесі басқару объектісінің моделін құру, яғни, объекттің жұмыс жасау заңдылықтарын формалау болып табылады. Осы модельдің негізінде басқару жүйесінің құрылымы, алгоритмдері мен параметрлері анықталады, жүйені жүзеге асырудың аппараттық-программалық құралдары таңдап алынады. Күрделі объекттің моделін құрудың тиімді әдістерінің бірі идентификаттау болып табылады.

Басқару үшін ең алдымен нені басқарытынымызды білу керек, яғни, ол арқылы болжамдалатын басқару салдарын «ойнатып көріп» олардың ең жақсысын таңдап алуға болатын объекттің моделі керек. Сондықтан осындай модельдеу барысында ең алдымен басқару қажеттілігін қанағаттандыратын модельді құру керек.

Арнайы басқару қажеттілігі үшін синтезделген мұндай модель тану моделі үшін өте қажет болатын құбылыстың ішкі механизмдерін бейнелемесе де болады. Оған объекттің кірісі мен шығысы арасындағы белгілі бір формальды байланыстың бар болуын констатациялау жеткілікті.

Осыған байланысты «басқару» ұғымы деп нені түсіну керек және ол басқарылатын объекттің модельдеу барысында алынатын модельге қандай талаптарды қойятынын анықтау мақсатқа лайықты.

Басқару деп нәтижеде объект қойылған мақсаттарды орындауға басқарудан бұрынғымен салыстырғанда белгілі бір мағынада «жақындау» болып қалатын объектке осындай мақсатқа лайықты әсер тигізу үрдісін түсінеді. 1.1 суретте объектті басқарудың жалпы схемасы көрсетілген.



X- басқарылмайтын, бырақ бақыланатын құрамдас; U - басқарылатын құрамдас;
Y- объекттің күйі туралы басқарушы құрылғыға қол жетерлік ақпарат.
Сурет 1.1 – Объектті басқарудың жалпы схемасы

Басқаруды синтездеу үшін ең алдымен Z мақсатын, яғни объектке әсер тигізу барысында басқарушы құрылғы неге «ұмтылуы» тиісті екенін, басқару көз қарасынан объект қандай долуы тиіс екенін анықтау керек. Бырақ, бұл жеткіліксіз, осы мақсатқа қалай жетуге болатынын көрсететін басқару алгоритмі A қажет.

Сонымен, басқару келесі төртеулік арқылы жүзеге асырылады:

$$<U, I=<X,Y>, A, Z>,$$

мұндағы U – басқарушы әсер; I=<X,Y> - орта мен объект қалып-күйлері туралы ақпарат; A- алгоритм; Z – басқару мақсаты.

Z мақсаты олардың орындалуы A алгоритм көмегімен U – басқарушы әсерді ұйымдастыру және Y арна бойынша ақпаратты жинау арқылы қамтамасыз етіледі. X пен U Y қалып-күйге қалай әсер ететінін, яғни, Y=F(X,U) модельге ие болмай U басқаруды анықтау мүмкін емес.

Идентификаттау және модельдеу теориясы – басқару объектілері мен басқару жүйелердің модельдерін құру мәселелерімен айналысатын және сол модельдердің параметрлерін бағалау проблемасын шешетін ғылыми-техникалық пән.

Қорытындылар

Идентификациялау әдісін таңдауға бір мағыналы келуге болмайды, себебі есеп қойылымының өзінде алдын ала анықсыздық болжамдалған (объект туралы білімдердің толық еместігі, объектті уақыт бойынша бақылаудағы шектеулер, объекттің кірісі мен шығысындағы сигналдарды өлшеудің дәл еместігі және с.с.)

Объекттің моделін идентификациялауда есептер кешені әдетте үш кезеңге бөлінеді:

- бірінші кезеңде объектті зерттеу нәтижелері немесе бар болатын априорлы мәліметтер бойынша модельдің құрылымы таңдап алынады,
- екінші кезеңде – модель мен объекттің жақындық (ұқсастық) критериі,

– үшінші кезеңде таңдап алынған критерийге сүйеніп, экспериментальды деректер бойынша модельдің параметрлері анықталады.

Бақылау сұрақтары

1 сәйкестендіру әдістерін дамыту және қалыптастыру;
2 модельдеудің философиялық аспектілері;
3 модельдер мен оларды құру әдістері туралы негізгі ұғымдар;
4 модельдің жеткіліктілігі мен критерийлері;
5 басқару процестеріндегі сәйкестендіру.

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001
2. Авдеев П. Ф. Философия информационной цивилизации. — М.: ВЛАДОС, 1994

Қосымша әдебиет

3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009.
4. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 2015.

Лекция 2 Математикалық модельдер туралы жалпы мағлұматтар және олардың классификациясы

Мақсаты: Бұл лекция келесі мәселелер мен проблемалар бойынша шолу-теориялық материалды қамту: математикалық модельдер туралы жалпы мағлұматтар және олардың классификациясы, модельдер жиыны, модельдер құрылымы, сызықтық модельдер мен сызықтық модельдер жиыны, беріліс функциялардың модельдер тобы, қалып-күй кеңістігіндегі модельдер, параметрлері таралған модельдер, уақыттық сипаттамалар, дискретті модельдер, қалып-күй кеңістігіндегі дискретті модельдер.

Тезістер

Математикалық модельдер классификациясы

Объектілер мен жүйелерді классификациялаудың түрлі әдістері ұсынылуы мүмкін, олардың арасында негізгілерін қарастырайық.

Физикалық модельдер. Классификациялау негізіне оригиналдан модельді абстракциялау дәрежесі қойылған. Алдын-ала барлық модельдерді екі топқа жіктеуге болады: материалдық (физикалық) және абстрактілі (математикалық). Әдетте физикалық модель деп оригиналға эквивалентті немесе ұқсас жүйені, немесе жұмыс жасау үрдісі оригиналдағыдай және физикалық табиғаты дәл сондай немесе басқа болатын жүйені атайды. Физикалық модельдердің келесі түрлелір ерекшелеуге болады: натурал, квазинатурал, масштабтық және аналогтық.

Натурал модельдер — ол нақтылы зерттелетін жүйелер. Оларды макет немесе тәжірибелік үлгілер деп атайды. Натурал модельдер жүйе-оригиналмен толығымен адекватты, сондықтан ол модельдеу нәтижелерінің жоғары дәлділігі мен шынайлығын қамтамасыз етеді. Есептеуіш жүйелерді жобалау үрдісі көбінесе тәжірибелік үлгілерді сынақтаумен аяқталады. Квазинатурал модельдер натурал және математикалық модельдер жиынтығы болып табылады. Модельдердің бұл түрі жүйенің бір бөлігінің математикалық моделі қанағаттанарлықсыз болған жағдайларда (мысалы, адам-оператор моделі) немесе жүйенің бір бөлігі басқа бөліктермен өзара әрекеттесуінде зерттелуі тиіс, бырақ олар әле жоқ немесе оларды модельге кірістіру қиын немесе қымбат болған жағдайларда пайдаланылады. Квазинатурал модельдердің мысалы ретінде оларда түрлі жүйелердің программалық қамтамасыз етілуі орындалып тексерілетін есептеуіш полигондар немесе сәйкес өндірістердің математикалық модельдері мен бірге зерттелетін нақтылы АБЖ қызмет атқара алады.

Масштабтық модель — ол физикалық табиғаты оригиналдың табиғатымен бірдей, бырақ одан айырмашылығы масштабта болатын жүйе. Масштабтық модельдің әдістемелік негізі ұқсастық теория болып табылады. Ол оригинал мен модельдің геометриялық ұқсастығын және олардың параметрлері үшін сәйкес масштабтарды сақтауды көздейді.

Аналогтық модельдер деп физикалық табиғаты оригиналдан өзгеше бырақ оригиналмен жұмыс жасау үрдістері ұқсас жүйелерді атайды. Бұл жағдайда міндетті шарт – зерттелетін объект пен оның моделінің параметрлерінің арасындағы бір мәнділік сәйкестік, және сонымен қатар, оларда өтетін үрдістердің өлшемсіз математикалық сипатталуларының бірдейлілігі болып табылады. Аналогтық модельді құру үшін зерттелетін жүйенің математикалық сипатталуының бар болуы қажет. Аналогтық модельдер ретінде механикалық, гидравликалық, пневматикалық жүйелер пайдаланылады, бырақ ең кең қолданысқа электрлі және электрондық аналогтық модельдер ие болды. Оларда тоқ күші немесе кернеу табиғаты басқа болатын физикалық шамалардың аналогтары болып табылады. Аналогтық модельдердің ерекшелігі олардың иілгіштігі және модельденетін жүйенің сипаттамалары мен параметрлерінің сандық мәндерін өлшеуге және өзгеруіне бейімделу қарапайымдылығы болып табылады. Аналогтық модельдерді есептеуіш техника құралдарын логикалық элементтер және электрлі тізбектер деңгейінде зерттеу барысында және сонымен қатар, жүйенің жұмыс жасау мысалы дифференциалдық немесе алгебралық теңдеулермен сипатталатын жүйелік деңгейде пайдаланады.

Математикалық модельдер. Математикалық модель жүйені абстрактілі тіл арқылы, жеке жағдайда, жүйенің жұмыс жасау үрдісін бейнелейтін математикалық қатынастар көмегімен формаланған сипаттау болып табылады. Модельді құрастыру үшін кез-келген математикалық құралдарды пайдалануға болады — алгебралық, дифференциалды және интегралдық есептеуді, жиындар теориясын, алгоритмдер теориясын және с.с. Кең мағынада бүкіл математика объекттер немесе үрдістердің модельдерін құрастыру және зерттеу үшін құрылған.

Сонымен қатар, **жүйелерді абстрактілі сипаттау** құралдар қатарына химиялық формулалар тілі, схемалар, сызбалар, карталар, диаграммалар жне с.с. жатады. Модель түрін таңдау зерттелетін жүйенің ерекшеліктеріне және модельдеу мақсаттарына байланысты, себебі модельді зерттеу белгілі сұрақтар тобына жауап алуға мүмкіндік береді. Басқа ақпаратты алу үшін модельдің басқа түрі қажет болуы мүмкін.

Модельдеу мақсаттары мен оригиналға тән сипаттар қорытындыда модельдің бір қатар басқа ерекшеліктерін және оларды зерттеу әдістерін анықтайды. Мысалы, математикалық модельдерді детерминді және ықтималдық (стохастикалық) түрлерге жіктеуге болады. Біріншілері модельдің параметрлері мен сипаттамалары арасында бірмәнділік сәйкестікті орнатады, ал екіншілері – сол шамалардың статистикалық мәндері арасында. Модель түрін таңдау кездейсоқ факторларды есепке алу қажеттілік дәрежесіне тәуелді. Математикалық модельдер арасында оларды зерттеу әдісі бойынша аналитикалық, сандық және имитациялық модельдерді ерекшелеуге болады.

Аналитикалық модель деп белгілі бір математикалық аппаратты пайдалана отырып, теңдеу шешімін айқын түрде алуға мүмкіндік беретін жүйенің формаланған сипатталуын атайды.

Сандық модель нақтылы бастапқы шарттар мен модельдің сандық параметрлері үшін тек жеке сандық шешімдерін табуға мүмкіндік беретін тәелділікпен сипатталады.

Имитациялық модель — ол жүйенің сипатталуы мен сыртқы әсерлердің, жүйенің жұмыс жасау алгоритмдері немесе сыртқы және ішкі бөгет әсерлердің ықпалынан жүйе қалып-күйінің өзгеру ережелер жиынтығы. Бұл алгоритмдер мен ережелер аналитикалық және сандық шешудің математикалық әдістерін пайдалануға мүмкіндік бермейді, бырақ жүйенің жұмыс жасау үрдісін имитациялауға және қажетті сипаттамаларды өлшеуге мүмкіндік береді.

Олардың құрылымдық-функциональды ұйымдастырылуында көрінетін жүйелер мен объекттердің көп түрлілігі түрлі модельдер жиындарын пайдалануды анықтайды. Оларды келесілерге тәуелді классификациялауға болады:

1) зерттелетін жүйенің жұмыс жасау сипаттамасына:

- детерминді, жұмыс жасауы детерминді шамалармен сипатталады;
- стохастикалық немесе ықтималдық, жұмыс жасауы кездейсоқ шамалармен сипатталады.

2) зерттелетін жүйеде өтетін үрдістердің сипаттамасына:

- үздіксіз, үрдістер уақыт бойынша үздіксіз ағады;
- дискреттік, үрдістер уақыттың дискреттік моменттерінде өз күйлерін өзгертеді.

3) зерттелетін жүйе туралы бастапқы деректердің шынайлық дәрежесіне:
- априорлы белгілі параметрлері бар;
- параметрлері белгісіз.

4) жүйенің жұмыс жасау режиміне:
- стационарлы, сипаттамалары уақыт барысында өзгермейді;
- стационарлы емес, сипаттамалары уақыт барысында өзгереді.

5) тағайындалуына:
- жүйенің құрамы мен құрылымын бейнелейтін статикалық немесе құрылымдық;
- жүйенің уақыт барысында жұмыс жасауын бейнелейтін динамикалық немесе функциональдық;
- зерттелетін жүйенің құрылымдық және жұмыс жасау ерекшеліктерін бейнелейтін құрылымдық-функциональды.

6) бейнелеу (сипаттау) және жүзеге асыру тәсіліне:
- концептуальдық немесе мазмұндық, зерттелетін жүйенің құрылымды-функциональдық ұйымдастырылуының ең маңызды ерекшеліктерін сипаттау (ең қарапайым жағдайда сөзбен сипаттау);
- физикалық немесе материальдық – оригиналға эквивалентты немесе ұқсама модельдер (макеттер) немесе олардың жұмыс жасау үрдісі оригиналдағыдай және физикалық табиғаты сондай немесе басқа;
- математикалық немесе абстрактілі, абстрактілі тіл көмегімен, жеке жағдайда, жүйенің жұмыс жасау үрдісін бейнелейтін математикалық қатынастар көмегімен жүйенің формаланған сипатталуы;
- программалық (алгоритмдік, компьютерлік), ЕТ құралдарын пайдалануға негізделген және әдетте программалық кешен болып табылатын және имитациялау немесе зерттелетін объектті сипаттайтын математикалық тәуелділіктерді графикалық бейнелеу арқылы зерттелетін объектті көрнекі және эффекттілі бейнелеуге мүмкіндік береді.

Бұдан ары негізгі назар күрделі техникалық жүйелерді зерттеуде кең пайдаланылатын математикалық модельдеуге аударылады.

Бірдей бір объекттерді күрделілігі бойынша әртүрлі математикалық модельдермен сипаттауға болады. Бұл кезде таңдаудың негізгі критериі оның зерттелетін объектке **адекваттылығы** болып табылады.

Статикалық объектілердің математикалық модельдері (СОММ)

Объекттердің статикалық сипаттарын модельдеу және идентификациялау есеп қойылымы (2.1 сурет).

Сурет 2.1 Статика объектісінің құрылымы

Статикалық сипаттамалар барлық өтпелі үрдістер аяқталған немесе олпрды ескермеуге болатын, күйлері қалыптасқан жағдайдағы жүйелерді есептеу немесе зерттеу барысында кең пайдаланылады. Статиканың математикалық моделіне тән ерекшелік – оларда уақыттан туындыны жоқ болуында..

Жалпы түрде объект статикасының математикалық моделі (ММ) – сыртқы әсер $\bar{V}$ векторының бар болуында кіріс параметрлерді шығыс параметрлермен байланыстыратын Y=φ(X_1, X_2,…, X_K) қайтарым функциясы болып табылады. Статистикалық әдістерді қолданғанда статиканың ММ әдетте регрессия теңдеуі түрінде бейнеленіледі (φ функциясы жіктелінетін полином, Тейлор қатарының кесіндісі):

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot X_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} b_{ij} \cdot X_i \cdot X_j \qquad (2.1)$$

мұндағы $\hat{Y}$ - шығыстың есептелген мәні; X_i - кірістер; $\bar{V}$ - сыртқы әсерлердің векторы (шу, бөгеулдер); N, n – тәжірибелер саны; N_0, n_0 , – параллель (қайталанатын) тәжірибелер немесе жоспар орталығындағы тәжірибелердің саны; m – параллель тәжірибелер серияларының саны; k - кірістер саны (факторлар, полином дәрежесі); N_{EX} – жоспардың тәжірибелік нүктелерінің саны; L; Lмағ – регрессия теңдеуіндегі сәйкесінше барлық және мағыналы коэффициенттер саны;

$b_0, b_1, b_2, b_3,...$ - идентификациялау нәтижесінде анықталатын регрессияның сұрыпталған коэффициенттері;

b_0 - регрессия теңдеуінің бос мүшесі;

$b_1, b_2, b_3,...$ - сызықтық эффекттер; $b_{11}, b_{22}, b_{33},...$ - квадраттық эффектер;

$b_{12}, b_{23}, b_{13},...$ - жұптық өзара әрекеттесулердің эффекттері;

$b_{111}, b_{222}, b_{333},...$ - үшеулік өзара әрекеттесулердің эффекттері;

Мысалы, k=3 (L =10) үшін теңдеудің жеке түрі:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1^2 + b_{22} \cdot X_2^2 + b_{33} \cdot X_3^2 \\ &+ b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Сонымен қатар, зерттелетін құбылыс немесе объекттің физикалық табиғатын бейнелейтін СММ-нің басқа түрлері де пайдаланылуы мүмкін. (2.2) түрдегі модельді таңдау себебі – оның қарапайымдылығына және зерттелетін тәуелділіктерді сипаттаудың жоғары дәлділігіне негізделген. Математикалық модельді (регрессия теңдеуін) таңдауға байланысты қосымша ескертулер. Дәстүрлі (1) түр пайдаланылады, қажет болса (егер теңдеу экспериментті адекватты емес сипаттаса) $bi \cdot X_i^3$, $b_j \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ және с.с. түрдегі мүшелер қосылуы мүмккін.

Әдетте (1) түрдегі теңдеу пайдаланылады, қажет болса (теңдеу экспериментті адекватты сипаттамаса) $bi \cdot X_i^3$, $b_j \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ және с.с. түрдегі мүшелерді қосуға болады. Бұл кезде регрессия теңдеуінің b_i коэффициенттерінің мәндерін анықтауда ешқандай есептеу қиындықтары пайда болмайды, бырақ, аппроксимациялау аралығынан тыс және экспериментальды табылған нүктелердің арасында жоғары ретті функция графигінің тәртібін болжауға мүмкін емес.

Сызықтық динамикалық объекттер мен жүйелердің математикалық модельдері (ДММ) және олардың арасындағы байланыс.

ДММ түрлі автоматтандыру жүйелерін талдау мен синтездеуде кең пайдаланылады (2.2 сурет). ДММ параметрлердің уақыт бойынша өзгеруін сипаттайды, олардың өрнектерінде міндетті түрде уақыт бойынша туындылар немесе оларға эквивалент параметрлер бар болуы тиіс. Өте жиі (негізделген жағдайларда) сызықтық ДММ-ді пайдаланады.

Сурет 2.2 – Динамика объектісі

Кіріс әсерлер векторын U әріппен (басқару), шығыс әсерлер векторын X (күйлер) немесе Y әріппен (шығыстар), бөгет әсерлер векторын V әріппен (2.2 суретте көрсетілмеген) белгілеу қабылданған.

Барлық ДММ-ды класстарға бөлуге болады.

1 Үздіксіз жүйелерді сипаттауға арналған модельдер

Сызықты **дифференциалды теңдеулер** (ДТ) динамиканы сипаттаудың ең жалпы формасы, бырақ, оларды инженерлік тәжірибеде пайдалану көп жағдайларда күрделі.

ДТ-ді жазудың ең жалпы түрі:

$$a_{n+1}\frac{d^n x}{dt^n}+...+a_2\frac{dx}{dt}+a_1 x=b_{m+1}\frac{d^m u}{dt^m}+...+b_2\frac{du}{dt}+b_1 u \qquad (2.3)$$

Беріліс функциялар (БФ). ДММ инженерлік тәжірибеде жиі БФ түрінде пайдаланылады. Өзін-өзі теңестіретін объекттер үшін БФ жалпы түрде:

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1+b_2\cdot p+\ldots+b_{m+1}\cdot p^m}{a_1+a_2\cdot p+\ldots+a_{n+1}\cdot p^n}\cdot\exp(-p\cdot\tau)\,. \qquad (n\geq m) \qquad (2.4)$$

«Аудандар әдісін» пайдаланғанда (b1=a1=1) [ ]:

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1+b_2\cdot p}{a_1+a_2\cdot p+a_3\cdot p^2}\cdot\exp(-p\cdot\tau)\,, \qquad \text{немесе} \qquad (2.5)$$

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1}{a_1+a_2\cdot p+a_3\cdot p^2+a_4\cdot p^3}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \qquad (2.6)$$

Басқа түрлері, мысалы:

$$W(p)=\frac{C\cdot\exp(-p\cdot\tau)}{\prod_{i=1}^{n}(1+T_i\cdot p)} \qquad \text{және с.с.} \qquad (2.7)$$

БФ-ның кешігуі бар апериодикалық буын түріндегі ықшамдалған өрнегін жиі пайдаланады:

$$W(p)=\frac{C}{1+T\cdot p}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \qquad (2.8)$$

Өзін-өзі теңестірмейтін объекттер үшін жалпы жағдайда келесі түрдегі БФ пайдаланады:

$$W(p)=\left[\frac{D}{p}-C\cdot\frac{b_1+b_2\cdot p+\ldots+b_{m+1}\cdot p^m}{a_1+a_2\cdot p+\ldots+a_{n+1}\cdot p^n}\right]\cdot\exp(-p\cdot t) \qquad (2.9)$$

(мұнда интегральды құрама бөлігі – 1/р шамассы бар екендігіне назар аударыңыз)

немесе өзін-өзі теңестірмейтін объекттер үшін ықшамдалған өрнектер:

$$W(p)=\frac{C}{p\cdot T_{Á}\cdot(1+T\cdot p)}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \quad \text{немесе:} \qquad (2.10)$$

$$W(p)=\frac{C}{T\cdot p}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \qquad (2.11)$$

W(p)-ның нақтылы түрі адекваттылық пен есептеу ыңғайлығын қамтамасыз ету шартына тәуелді таңдап алынады.

Математикалық модельдің адекваттылығы, мысалы, (2.12) формула бойынша бағаланылуы мүмкін. Осы формула бойынша табылған δ мәні 3-7 % дан аспайтын болса, онда модель адекватты болып саналады:

$$\delta = \frac{100\%}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i - \hat{X}_i}{X_i} \qquad (2.12)$$

(2.8) түрдегі теңдеу үшін выход $\hat{X}_i$ шығыс келесі формула бойынша аналитикалық анықталады:

$$\hat{X}(t) = C \cdot \Delta U \cdot \left[1 - \exp(-\frac{t-\tau}{T})\right] \qquad (t \geq \tau \text{ болғанда}) \qquad (2.13)$$

$$\hat{X}(t) = 0 \qquad (\text{болғанда } t < \tau) \qquad (2.13A)$$

ал (2.7) түрдегі W(p) үшін n=2 болғанда :

$$W(p) = \frac{C \cdot \exp(-p \cdot \tau)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

$$\hat{X}(t) = C \cdot \Delta U \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \exp(-\frac{t-\tau}{T_1}) + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot \exp(-\frac{t-\tau}{T_2})\right) \qquad (2.14)$$

Жалпылау жағдайда берілген есепті шешу барысында сәйкестік критериі ретінде келесі түрдегі критерийді алады:

$$\min(F_{ai}), \; F(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(X_i - \hat{X}_i\right)^2 \qquad (2.15)$$

мұндағы X_i – эксперименталды мән; $\hat{X}_i$ – есептелген мән.

a_i коэффициенттерін табу үшін келесі теңдеуді құрады:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \qquad (2.16)$$

Сонымен, оны шешу арқылы a_i –ді анықтауға болатын теңдеулер жүйесі пайда болады.

Статиканың пайда болған математикалық модельдерінің адекваттылығын Фишер критериі бойынша тексеріледі [1] (және келесі лекцияны қараңыз). Бұл үшін қосымша ыңғайлылау R-квадрат (детерминация коэффициенті) жуықтау жарамдылығының критерин пайдалануға болады [5], ол бейсызықты модельдер дәлділігін бағалау үшін пайдаланылады. R-квадрат критериі тек нөльден бірге дейін мәндерді қабылдай алады, ол бірге жақындаған сайын параметрлік модель бастапқы деректерді жақсылау жуықтайды.

Оны анықтау үшін алдымен SSE (Sum of squares due to error) – қателер квадраттарының қосындысы келесі формула бойынша есептеледі:

$$SSE = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (y_k - \hat{y}_k)^2 ,$$

мұндағы w_k - салмақтар (бізде олар берілмеген, бірлікке тең деп саналады); y_k - әр тәжірибе үшін деректердің эксперименталды (бастапқы) мәндері; $\hat{y}_k$ - әр тәжірибе үшін деректердің есептелетін (болжамдалған) мәндері, (1) формула бойынша алынған; n - эксперименталды мәндердің саны (мысалы, n=20).

R-квадрат критериі (ары қарай R деп белгіленген) SSR регрессияға қатысты квадраттар суммасының квадраттардың толық (SST) суммасына қатынас ретінде анықталады, яғни:

$$SSR=\sum_{k=1}^{n} w_k\cdot(\hat{y}_k-\bar{y}_k)^2; \qquad SST=\sum_{k=1}^{n} w_k\cdot(y_k-\bar{y}_k)^2; \qquad R=\frac{SSR}{SST}=1-\frac{SSE}{SST},$$

мұндағы $\bar{y}_k$ - экспериментальды (бастапқы) деректердің орта мәні.

R-квадрат критерийдің алынған мәндерінің бірлікке жақындығы эксперименттің жоғары дәлдікпен сипатталғаны жөнінде білдіреді, мысалы (2.2) түрдегі өрнекпен. Әдетте тәжірибе үшін жеткілікті деп R-квадрат критерийдің 0.9 дан жоғары мәнді санайды.

Бұл көрсеткіш келісімнің статистикалық өлшемі болып табылады, оның көмегімен регрессия теңдеуінің нақтылы деректерге қаншылықты сәйкес екендігі анықталады. Детерминация коэффициенті 0 ден 1 дейін аралықта өзгереді. Егер ол 0-ге тең болса, онда ол регрессиялық модельдің айнымалыларының арасында байланыс жоқ екендігін және оның орнына шығыс айнымалының мәндерін бағалау үшін дәл сондай сәттілікпен бақыланатын мәндердің жай орта мәнін пайдалануға болатындығын білдіреді. Керісінше, егер детерминация коэффициенті 1-ге тең болса, ол бақылаудың барлық нүктелері дәл регрессия сызығында жататын, яғни олардың ауытқулар квадраттарының қосындысы 0-ге тең болатын идеальды модельге сәйкес. Тәжірибеде егер детерминация коэффициенті 1-ге жақын болса, ол модель өте жақсы жұмыс істейтіндігін (жоғары мәнділікке ие) екендігін білдіреді, ал егер 0-ге жақын болса, ол модельдің төмен мәнділігін білдіреді, кіріс айнымалы шығыс айнымалының тәртібін нашар "түсіндіреді", яғни олардың арасында сызықтық тәуелділік жоқ. Мұндай модельдің тиімділігі төмен. Сонымен қатар, абсолюттік пен салыстырмалы қателердің қосындыланған мәндері бойынша және әр тәжірибе үшін шығыстың экспериментальды табылған мәндері мен есептелген мәндерінің салыстыру графиктерін талдау арқылы эксперимент нәтижелерін аппроксимациялау дәлділігі туралы қосымша пікір жасауға болады.

Кейде байланыс тығыздығының көрсеткіштеріне сапалық баға беруге болады (Чеддок шкаласы):

Байланыс тығыздығының сандық өлшемі	Байланыс тығыздығының сапалық сипаттамасы
0,1 - 0,3	Аз
0,3 - 0,5	Орташа
0,5 - 0,7	Елеулі
0,7 - 0,9	Жоғары
0,9 - 0,99	Өте жоғары

Мәні 1-ге тең болғанда функциональдық байланыс пайда болады, ал байланыстың жоқтығы – 0. Байланыс тығыздығының көрсеткіштерінің 0.7 ден кіші мәндерінде детерминация коэффициентінің шамасы әрдайым 50 % дан төмен. Ол нәтижелік көрсеткіштің өзгеруіне әсер тигізуші модельде ескерілмеген қалған факторлармен салыстырғанда факторлық белгілер вариацияларының үлесіне аз бөлігі келетінін білдіреді. Мұндай шарттарда құрылған регрессиялық модельдердің тәжірибелік мағынасы төмен.

Жиілік сипаттар (ЖС). Сызықты жүйенің кірісіне келесі сигналды бергенде:

$$U(t)=A_u\sin(\omega t)=A_u\cdot\exp(j\omega t) \qquad (2.17)$$

шығыстағы сигнал:

$$X(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi) = A_x \cdot \exp(j\omega t + \varphi), \qquad (2.18)$$

ал АФЖС түрі:

$$W(j\omega) = C \cdot \frac{b_1 + b_2 \cdot j\omega + \ldots + b_{m-1} \cdot j\omega^m}{a_1 + a_2 \cdot j\omega + \ldots + a_{n-1} \cdot j\omega^n} \cdot \exp(-j\omega \cdot \tau) = A(\omega) \cdot \exp(j\phi(\omega)) = \operatorname{Re} W(\omega) + \operatorname{Im} W(\omega)$$

(2.19),

мұндағы: $A(\omega) = \sqrt{[\operatorname{Re} W(\omega)]^2 + [\operatorname{Im} W(\omega)]^2}$ (2.20)

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{[\operatorname{Im} W(\omega)]}{[\operatorname{Re} W(\omega)]} \qquad (2.21)$$

Сонымен қатар, **зілдеме** (салмақ) **функциялар**:

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t g(t) y(t-\tau) d\tau \qquad (2.22)$$

Және **күйлер кеңістігінің матрицалық сызықты теңдеулер** жүйелері де пайдаланылады.

Күйлер параметрлерінің кеңістігіндегі модель:

$$\dot{x} = Ax + bU$$
$$y = C^T x \quad , \qquad (2.23)$$

мұндағы: U – кірістің векторы; x – күйлер айнымалыларының векторы; y – жүйе шығысының вектор; A – жүйе динамикасының матрицасы; B – басқару матрицасы; C^T - өлшеу (сезгіш құралдар) матрицасы

немесе

$$\dot{x} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t);$$
$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \qquad (2.24)$$

2 Дискретті жүйелерді сипаттауға арналған модельдер

Сызықты айырымдық теңдеулер

Сандық басқару жүйелерінде математикалық модельдер реккуренттік айырымдық теңдеулер түрінде жазылады.

Егер технологиялық басқару объекттің (ТБО) математикалық моделі (2.8) түрдегі беріліс функциямен бейнеленген және нөльдік ретті фиксатор пайдаланған болса, онда уақыттың T_j моменті үшін объект шығысы сандық түрде келесідей анықталады:

$$X_j = A \cdot X_{j-1} + B \cdot U_{j-D} \qquad (2.25)$$

мұндағы: $A = -\exp(-T_O / T)$, $B = (1 - A) \cdot C$, $D = [\tau / T_O]$

(2.25) теңдеу уақыттың j = 1, 2, 3, … дискретті моменттері үшін объекттің үздіксіз (2.8) теңдеуінің айырымдық эквиваленті болып табылады.

D – ең жақын ұлкен бүтінге дейін дөңгелектелген сан, сұрау периодтардың T_0 бүтін санында бейнеленген ТБО-ың кешігуін анықтайды.

j < D үшін: $X_j = A \cdot X_{j-1}$ X_{j-1} - выход объекта в момент времени уақыттың T_j-T_O моментіндегі, яғни сұраудың осыған дейінгі қадамындағы объекттің шығысы.

U_{j-D} - уақыттың T_j-D моментіндегі басқару әсер (реттегіштің шығысы).

Дискреттік беріліс функциялар:

$$W(z)=\frac{y(z)}{U(z)}=\frac{b_m z^{-n}+b_{m-1}z^{m-1}+...b_0}{a_n z^{-n}+a_{n-1}z^{-(n-1)}+...a_0} \qquad (2.26)$$

Күйлер параметрлерінің кеңістігіндегі модель

x(k+1)=A*x(k)+B*U(k)

(2.27)

y(k)=Cт*x(k)

Сандық айырымдық рекурренттік теңдеулер:

$$X_j = A\cdot X_{j-1} + B\cdot U_{j-D}$$

(2.29)

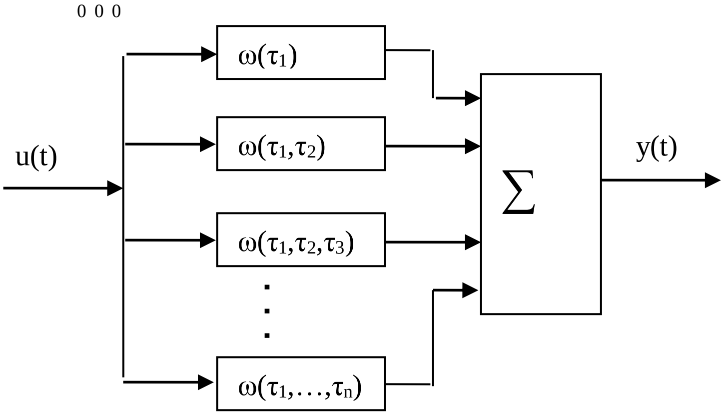
3 Бейсызықты жүйелерді сипаттауға арналған модельдер (сурет 2.3)

u(t)=δ(t)   y(t)=ω(t)

$$y(t)=\int_0^\infty \omega(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\int_0^\infty\int_0^\infty \omega(\tau_1,\tau_2)\cdot u(t-\tau_1)\cdot u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \qquad (2.30)$$

$$y(t)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \omega(\tau_1\tau_2\tau_3)\cdot u(t-\tau_1)\cdot u(t-\tau_2)\cdot u(t-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \qquad (2.31)$$



Сурет 2.3 – динамиканың бейсызықты модельдері

4 Стохастикалық модельдер. Бейсызықты жүйенің Вольтер ядроларын пайдаланатын моделі. Шулары бар модельдердегі құбылыстарды қарастыру барысында шулардың идентификаттау үрдісіне тигізетін әсерін авто- және өзара- корреляциялық функциялар ұғымдарын пайдалану арқылы бағалау қабылданған. Шулардың әсерлерін бағалауға болады, егер шуларды сипаттау үрдісін келесі теңдеумен сипаттаса:

$$R_{uy}(\tau)=\int_0^\infty \omega(t)R_{uu}(t-\tau)dt \qquad (2.31)$$

R_{uu}- кіріс сигналдың автокорреляциялық функциясы (6-шi лекциядан қараңыз) ;

R_{uy}- кіріс және шығыс сигналдың өзара-корреляциялық функциясы.

Егер u(t) – кездейсоқ стационарлы үрдіс және y(t) ол да сондай болса, онда бұл ұғымдарды пайдалана отырып, R_{uu} мен R_{uy} кездейсоқ құрамдың шамасын бағалауға мүмкіндік беретіндігін ескермейді, осы интегральды теңдеуді шешу арқылы кіріс және шығыс бөгеттерді ескеріп бағаларды алуға болады. Егер кіріс сигналды “абсолютті” дәл өлшеуге болатын, ал шығыс сигнал бөгеуілдің барлық аддитивті құрамдастарын қамтитын шарт орындалса бұл есептің шешімі бар.

Сонымен, идентификатталатын модельдің түрі бойынша ерекшелеуге болады: сызықты және бейсызықты; детерминді және стохастикалық; уақыты үздіксіз және дискретті; стационарлы және бейстационарлы; бірөлшемді және көпөлшемді; статикалық және динамикалық; параметрлері жинақталған және таралған. Студент осындай объекттерге мысал келтіре білуі тиіс.

Идентификаттау қасиеттері: басқарылымдық, бақыланулық, идентификатталанулық.

Басқарылымдық – жүйе басқарылымды болады, егер уақыттың кез-келген моменті үшін кез-келген күйлерде жүйенің бастапқы күйін соңғы күйге ауыстыратын **u** басқару бар болса.

$$u_y = \left[B; AB; ...A^{n-1}B\right]$$

Мұндағы: n – жүйенің реті; A – **x**-тің жанындағы коэффициенттерінің матрицасы;

B – **r** -дің жанындағы коэффициенттерінің матрицасы;.

Жүйенің басқарылымдық шарты **det$\boldsymbol{u_y}$** нөльге тең болмауы.

Бақыланулық – жүйе бақыланылады, егер оның кез-келген немесе барлық күйлерін жүйенің шығыс векторы бойынша тікелей немесе жанама түрде анықтауға болатын болса.

$$u_í = \left[C^T; C^T A^T; ...C^T (A^{n-1})^T\right],$$

мұндағы: C – шығыс матрицасы, **y**-ің жанындағы коэффициенттер.

Кемінде бір минор нөльге тең болмауы тиіс, сол жағдайда жүйе бақыланылады.

Идентификатталанулық – жүйе идентификатталанады, егер жүйенің күйлер координаттарының өзгерулері бойынша оның параметрлерін анықтау мүмкін болса.

$$ID = \left[V(0); A^n V(0); ...A^{nn} V(0)\right],$$

мұндағы: V(0) – бастапқы шарттар векторы; A^n – өтулер матрицасы.

$$A^n = A^R + I,$$

мұндағы: A^R – кеңейтілген матрица; I – бірлік матрица.

Жүйе идентификатталанады, егер **det** ≠0.

Динамикалық жүйелерді идентификаттау. Динамикалық жүйе келесі түрдегі беріліс функциямен сипатталған болсын:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_m}$$

n – теңдеулерден тұратын бірінші ретті дифференциальды теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = AX(t) + BU(t)$$

$$Y(t) = CX(t)$$

мұндағы: Y – шығыс айнымалылар, U(t) – кіріс айнымалылар, X – ішкі айнымалылар.

Бұл жүйені қалай алуға болады?

I. а) $W(p) = \frac{y(p)}{u(p)}$ б) $p = \frac{d}{dt}$

в) Айнымалыны ауыстыру $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = y_1, \quad \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} = y_2$

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} = u_1, \quad \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} = u_2$$

г) Дифференциальды теңдеулердің n–ретті жүйесін аламыз.

Күйлер кеңістігі әдістері көмегімен.

2. Дифференциальды теңдеулерден айырымдық теңдеулерге өтеміз:

$$\begin{cases} V(k+1) = \hat{O}(T_0)V(\hat{e}) \\ Y(k) = CV(\hat{e}) \end{cases}$$

мұндағы: $V = [U \quad X]^T$ - жалпылама вектор.

3. Өтулер матрицасын аламыз:

$$\Phi(T_0) = V^T(\kappa+1)V^T(\kappa)\left[V(\kappa)V^T(\kappa)\right]^{-1},$$

бұл жағдайда е өлшеулерде V(к) келесі мән қабылдайды:

$$V(\kappa) = \begin{bmatrix} v_1(1) & v_1(2) & \cdots & v_1(e) \\ \vdots & & & \vdots \\ v_n(1) & v_n(2) & \cdots & v_n(e) \end{bmatrix}$$

$$V(\kappa+1) = \begin{bmatrix} v_1(2) & v_2(2) & \cdots & v_n(2) \\ v_1(3) & v_2(3) & \cdots & v_n(3) \\ \vdots & & & \vdots \\ v_1(e+1) & v_2(e+1) & \cdots & v_n(e+1) \end{bmatrix}$$

Егер $\hat{O}(T_0) = V^T(k+1)V^T(k)[V(k)V^T(k)]^{-1}$ болса, онда

$$V(\kappa+1) = \begin{bmatrix} v_1(2) & v_2(3) & \cdots & v_n(e+1) \\ v_1(2) & v_2(3) & \cdots & v_n(e+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ v_1(2) & v_2(3) & \cdots & v_n(e+1) \end{bmatrix}$$ болғанда

өлшеулер саны сызықты регрессиялық талдау үшін ұқсама формула бойынша анықталады.

Бақылау сұрақтары

1 Математикалық модельдер туралы жалпы мәліметтер және олардың жіктелуі;

2 көптеген модельдер, модельдер құрылымы;

3 сызықтық модельдер және көптеген сызықтық модельдер, беріліс функциясының модельдер тобы, күй кеңістігіндегі модельдер;

Бөлінген параметрлері бар 4 Модель, уақыт сипаттамалары;

5 Дискретті модельдер; күй кеңістігіндегі дискретті модельдер;

6 регрессияны басқару түріндегі статикалық және динамикалық модельдер.

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 2000. –312 с.
2. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009

Қосымша әдебиет

4. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.

3 лекция Регрессия теңдеуі түріндегі статикалық және динамикалық модельдер (1-ші бөлім)

Мақсаты: лекцияда біз ықтималдықтар теориясы мен сызықты алгебра теориясының негізгі теориялық бөлімдерін қарастыру. Бұл мәліметтер бізге келесі лекциялар мен зертханалық және практикалық сабақтардың тапсырмаларын орындау үшін қажет. Mathcad және MATLAB сияқты жүйелерді пайдалану бұл материалды тәжірибеде пайдалануды едәуір жеңілдетеді.

Тезистер

Регрессиялық талдау қазіргі кезде классикалық статистикалық әдіс болып табылады. Өзінің кең мүмкіндіктерінің арқасында түрлі регрессиялық процедуралар үрдістерді идентификаттау үшін инженерлік тәжірибеде сәтті пайдаланлады, бырақ оларды уақыттың нақтылы масштабында көпөлшемді үрдістерді идентификаттауға қолдану тек жылдам жұмыс істейтін компьютерлердің дамуы мен ендірілуінен кейін мүмкін болды.

Ең кіші квадраттар әдісін пайдаланып регрессиялық процедураларға негізделген идентификаттау әдістерді сызықты мен қатар бейсызықты үрдістерге де пайдалануға болады және олар бір мезгілде бірнеше кірістер бойынша идентификаттауды жүргізуді жеңілдетеді. Оның үстіне, регрессиялық әдістер уақыттың нақтылы масштабында идентификаттауды жүргізуге мүмкіндік береді, себебі олар жүйенің қалыпты жұмыс жасау барысында алуға мүмкін болатын кіріс және шығыс сигналдарды өлшеулерде негізделген.

Регрессиялық идентификаттау үшін өлшеулер жасалып жатқан период аралығында идентификатталатын үрдістің параметрлері стационарлы немесе квазистационарлы етіп қабылданады. Бұл период mT -дан кем болмауы тиіс, мұндағы T — өлшеу аралығы.

Ықтималдықтар теориясының элементтері. Негізгі ұғымдар мен анықтамалар.

Ықтималдықтар теориясында оқиға, ықтималдық, кездейсоқ шама ұғымдары кең пайдаланылады.

Оқиға – тәжірибенің нәтижесінде орын алуы немесе алмауы мүмкін болатын кез-келген факт.

Оқиғаның ықтималдығы – сол оқиғаның объективті мүмкіндік дәрежесінің сандық мөлшері. Кейбір А оқиға болуы немесе болмауы жағдайға тәуелді болатын кейбір тәжірибе немесе құбылыс қарастырылатын болсын.

Егер бірдей және бір-біріне тәуелсін сынаулардың бүкіл сериясы жүзеге асырылатындай тәжірибенің шарттарын көп рет ұдайы өндіру мүмкін болса, онда А оқиғаның ықтималдығын: $P(A) = m / n$ формула бойынша есептеуге болады, мұндағы n – бір-бірі н өзара болғызбайтын нәтижелердің жалпы саны; m – А оқиғасының пайда болуына әкелетін нәтижелер.

Ықтималдық 0 ден 1 дейін мәндерді қабылдай алады. Ықтималдығы 0-ге тең оқиға мүмкін емес оқиға, ал ықтималдығы 1-ге тең оқиға шынайы оқиға деп аталады. Егер тәжірибенің нәтижесінде міндетті түрде олардың кемінде біреуі пайда болуы тиіс болса, ондай бірнеше оқиғалар толық топты құрайды. Егер олардың екеуі бірге пайда бола алмаса ондай бірнеше оқиғаларды бұл тәжірибеде үйлесімсіз оқиғалар деп атайды. Егер осы оқиғалардың бір де біреуінің объективті пайда болу мүмкіндігі басқасының пайда болу мүмкіндігінен аспайтын бірнеше оқиғаларды бұл тәжірибеде мүмкіндіктері бірдей деп атайды. Егер олардың біреуінің пайда болуы басқа оқиғалардың пайда болғандығына тәуелді болмаса ондай оқиғалар тәуелсіз оқиғалар деп аталады.

Алдын-ала белгісіз кейбір мәнді қабылдай алатын шама кездейсоқ шама деп аталады.

Кездейсоқ шамалардың екі түрі болуы мүмкін:

- дискреттік (үздікті), оларды алдын-ала нөмірлеуге болатын бір-бірінен ажыратылған мәндерді ғана қабылдай алады;
- үздіксіз (аналогтық), кейбір аралықтағы кез-келген мәнді қабылдай алады.

Кейде дискреттік табиғатқа ие болатын кездейсоқ шамалар үздіксіз ретінде қарастырылады. Мұндай алмастыру кездейсоқ шама бір-бірінен айырмашылығы шамалы ғана болатын мәндерді қабылдайтын жағдайларда орынды, яғни дискретті кездейсоқ шаманы үздіксіз шамамен алмастыру есептеу нәтижелеріне әсерін тигізбейді. Мысалы, бір операция орындалуының орта уақытын орындалатын операциялар санына көбейтіндісі ретінде анықталатын, дискреттік кездейсоқ шама болып табылатын процессорда есепті шешу уақыт әдетте нөльден шексіздікке дейін аралықта өзгеретін үздіксіз кездейсоқ шама ретінде қарастырылады.

Кездейсоқ шамаларды жиі бас әріптермен, ал олардың мүмкін болатын мәндерін сәйкесінше кіші әріптермен белгілейді. Мысалы, есепті шешу барысында магниттік дискілерге қатынасу сандары – кездейсоқ X шама $x1=0$, $x2=1$, $x3=2$, $x4=3$, ... мәндерді қабылдауы мүмкін.

Кездейсоқ шамалардың таралу заңдары. $x1, x2,...,xn$ мәндерді қабылдайтын дискреттік кездейсоқ шаманы қарастырайық. X шама осы мәндердің әр қайсысын кейбір ықтималдықпен қабылдауы мүмкін. Кездейсоқ X шама xi мәнді қабылдайтын ықтималдығын pi арқылы белгілейік: $pi = Pr(X = xi)$ $(i = 1, n)$. Егер тәжірибенің нәтижесінде X шама осы мәндердің тек біреуін ғана қабылдаса, онда үйлесімсіз оқиғалардың толық тобына ие боламыз, және кездейсоқ шаманың барлық мүмкін болатын мәндерінің ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең.

Бұл қосындыланған ықтималдық кейбір түрде жеке мәндер арасында таралған. Кездейсоқ шама ықтималдық көз қарасынан толығымен сипатталады, егер біз осы таралуды беретін, яғни таралу заңын анықтайтын болсақ.

Кездейсоқ шаманың таралу заңы деп кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндері мен соларға сәйкес ықтималдықтары арасындағы байланысты анықтайтын қатынасты атайды. Кездейсоқ шама туралы ол осы таралу заңына бағынышты деп айтады.

Дискреттік таралу заңдары. Дискреттік кездейсоқ шаманың таралу заңы (искреттік таралу заңы) келесі тәсілдердің біреуімен берілуі мүмкін:

- аналитикалық - кездейсоқ шаманың мәніне ықтималдықтың тәуелділігін бейнелейтін математикалық өрнек түрінде;
- кестелік - кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндері және оларға сәйкес ықтималдықтар санақталған кездейсоқ шаманың таралу қатары түрінде;
- графикалық – абсциссалар өсі бойынша кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндері, ал ординат өсі бойынша сол мәндердің ықтималдықтары салынған таралу көпбұрышы түрінде.

Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттары. Сандық сипаттар кездейсоқ шама таралуының ең маңызды ерекшеліктерін сығылған түрде бейнелеуге мүмкіндік береді. Көп жағдайларда кездейсоқ шама таралуының маңызды жақтарын кейбір дәрежеге дейін сипаттайтын тек жеке сандық параметрлерді ғана көрсеткен жеткілікті болады. Мысалы, оның жанында кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндері топтасатын кейбір орта мән; осы мәндердің орта мәнге салыстырмалы ыдырау дәрежесін сипаттайтын кейбір сан; таралудың асимметриясын (немесе “қиғаштығын”) сипаттайтын сан; таралудың “тіп-тіктігін”, яғни төбесінік үшкірлігін немесе жалпақтығын сипаттайтын сан және с.с.

Ықтималдықтар теориясынан көптеген сандық сипаттар пайдаланылады. Олардың ішінен түрлі ретті бастапқы және орталық моменттер ең жиі пайдаланылады. Олардың әрқайсысы таралудың кейбір қасиетін сипаттайды. Бастапқы моменттер координаттар басына салыстырмалы, ал орталық моменттер математикалық күтім, яғни таралудың орталығына салыстырмалы қарастырылады.

Сандық сипаттарды пайдалану көптеген ықтималдық есептерді шешуді едәуір жеңілдетеді.

X дискреттік кездейсоқ шама $x_1, x_2,\ldots,x_k$ мәндерін қабылдай алатын болсын дейік. Онда: $X=x_i$ оқиғаның пайда болу жиілігі (жиілік = min) – оларда X x_i мәнін қабылдаған m_i тәжірибелер санының жалпы n тәжірибелер санына қатынасы.

$X=x_i$ оқиғаның ықтималдығы [$P(X=x_i)$ белгіленеді] ол n өскен сайын min-ға ұмтылады: $p_i=P(X=x_i)\approx$ min

Колмогоровтың ықтималдық теориясының аксиомалары

1) Кездейсоқ A оқиғаның пайда болу ықтималдығы – теріс емес сан: $P(A) \geq 0$

2) Шынайы (сөзсіз орын алатын) U оқиғаның ықтималдығы бірге тең: P(U)=1; ал болуы мүмкін емес V оқиғаның ықтималдығы нольге тең: P(V)=0, демек $0 \leq P \leq 1$

3) Бірнеше үйлесімсіз оқиғалардың $A_1+A_2+\ldots+A_n$ кемінде біреуі пайда болатын ықтималдығы осы оқиғалар ықтималдықтарының қосындысына тең (ықтималдықтарды қосу теоремасы): $P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

4) Оқиғалардың $(A_1+A_2+\ldots+A_n)$ қосындысы – A_i оқиғалардың кемінде біреуі пайда болуына (орын алатындығына) сәйкес оқиға, ал көбейтіндісі – барлық A_i оқиғалардың пайда болғанына сәйкес оқиға.

5) Кездейсоқ шаманың мүмкін болатын барлық мәндер ықтималдықтарының қосындысы бірге тең.

6) Егер олардың әрқайсысының ықтималдығы қалған кез-келгенінің пайда болғаны не болмағанына тәуелсіз болса, онда мұндай оқиғалар тәуелсіз деп аталады. Бірнеше тәуелсіз оқиғалар көбейтіндісінің ықтималдығы осы оқиғалар ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

7) Егер **A** оқиғасының ықтималдығы **B** оқиғаның пайда болуына тәуелді өзгеретін болса онда **A** оқиғасы **B** оқиғасына тәуелді. **B** оқиғасы орын алған шарты бойынша есептелген **A** оқиғаның ықтималдығы – **A** оқиғаның шартты ықтималдығы д.а., ол P(A/B) белгіленеді.

Тәуелді оқиғалар үшін екі оқиғаның көбейтіндісінің ықтималдығы – біріншісі орын алған шартында есептелген екіншісінің шартты ықтималдығын біріншісінің ықтималдығына көбейтіндісіне тең. $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$. Осы сияқты, егер **B** оқиғасы **A** оқиғасының алдында пайда болып оған әсер ететін болса, онда $P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$.

Мысал. Әрқайсысы істен шығуы мүмкін болатын тізбектеліп қосылған үш элементтен тұратын автоматты басқару жүйесінің сенімділігін анықтау қажет болсын. Олардың әрқайсысының істен шықпай жұмыс істеу ықтималдығы сәйкесінше: $P(A_1)=0{,}9$; $P(A_2)=0{,}85$; $P(A_3)=0{,}82$. Көбейту теоремасына сәйкес $P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}82 = 0{,}6273$

Математикалық күтім және дисперсия, олардың бағалары мен қасиеттері. **X** айнымалының математикалық күтімінің бағасы (m_x немесе $\overline{X}$ белгіленеді):

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (3.1)$$

n – тәжірибелер саны

X айнымалының дисперсиясының бағасы (σ_X^2 не S_X^2 белгіленеді):

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{f} \qquad (3.2)$$

Еркіндік дәрежелер саны ***f*** = [өлшеулердің жалпы саны] – [осы өлшеулер бойынша есептелген және ағымдық формулада пайдаланылған бағалар саны]. Бұл жағдайда алдын-ала есептелген және қолданыстағы шама $\bar{X}$, демек $f = n - 1$.

$S_X = \sqrt{S_X^2}$, орташа квадратты ауытқу (қате, стандарт).

Y ұдайы өндірудің дисперсиясының бағасы (σ_Y^2 немесе S_Y^2 белгіленеді):

$$S_{YÄθÍ}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_0}(Y_i - \bar{Y})^2}{n_0 - 1} \qquad (3.3)$$

немесе $$S_{YÄθÍ}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_0}(Y_{ji} - \bar{Y}_j)^2}{m \cdot (n_0 - 1)}$$

(3.3А)

$S_{YÄθÍ} = \sqrt{S_{YÄθÍ}^2}$ - тәжірибенің қатесі (ұдайы өндіру қатесі, орташа квадратты қате, орташа квадратты ауытқу - ОКА). [1, 37 бет]

Y Қалдық дисперсияның бағасы (адекваттық дисперсиясы):

$$S_{ÊÀËÄ}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_0}(Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{n_0 - L} \qquad (3.4)$$

$\widehat{Y}$ - шығыстың есептелген мәні; L – регрессия теңдеуінің коэффициенттер саны;

Нормаль таралу. $$f(x) = \frac{1}{S_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(X - \bar{X})^2}{2 \cdot S_X^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

(3.5)

Стьюдент критериі регрессия теңдеуінің b_i коэффициенттерінің мағыналығын анықтауға мүмкіндік береді. (коэффициенттердің мағыналығы гипотезасын тексеру үшін пайдаланылады). Бұл үшін L коэффициенттердің әрқайсысы b_i үшін келесі формула бойынша:

$$t_{b_i} = \frac{|b_i|}{S_{b_i}}$$

(3.6)

есептеледі. Егер $t_{b_i} > t_{ÊÅÑ}(f)$, онда b_i мағыналы болып саналады, кері жағдайда ол мағынасыз болады да, нольге теңестіріледі.

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{S^2_{YÄ\theta í}}{k}} = \frac{S_{YÄ\theta í}}{\sqrt{k}}, \qquad S_{YÄ\theta í} = \sqrt{S^2_{YÄ\theta í}} \tag{3.7}$$

S_{b_i} - регрессияның b_I коэффициенттерін анықтаудағы орташа квадратты қате;

$t_{КЕС}(f)$ - ол $f = n_0 - 1$ немесе $f = m\cdot(n_0 - 1)$ дегі Стьюдент критериінің кестелік мәні;

Кейде *bi* мағынасыз болғаны басқа салдардардан да болуы мүмкін, мысалы, экспериментке даярлану барысындағы факторларды өзгерту аралығы дұрыс таңдап алынбағандықтан. Стьюдент критериін пайдалану мысалы. [1, 164 бет.]

Стьюдент критериі бойынша регрессия теңдеуі коэффициенттерінің мағыналығын бағалау:

Бастапқы коэффициенттер: b^T =(8.5 2.5 -0.5 3.5 -0.5 0.5 -1.5 -0.5)

3 параллель тәжірибе жүргізілген: $Y0_1=8$ $Y0_2=9$ $Y0_3=8.8$

n0 = 3   i = 1 .. n0   L = 8   j= 1 .. L

Матем күтім Y0= $Y0_{орт} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n0} Y0_i\right)}{n0}$, $Y0_{орт}$= 8.6

Ұдайы өндіру дисперсиясын S_b анықтау

$$S_b^2 = \frac{\left[\sum_{m=1}^{M}\left(Y0_m - y0\right)^2\right]}{f2}, \quad S = \sqrt{S_b^2}, \quad S_b = \frac{S}{\sqrt{N}}; \quad S_b^2 = 0.28; \quad S = 0.529; \quad S_b = 0.187$$

$$Stud = \begin{bmatrix} 12.71 \\ 4.30 \\ 3.18 \\ 2.78 \\ 2.57 \\ 2.45 \\ 2.37 \\ 2.31 \\ 2.26 \\ 2.23 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{f=2 болғанда } 4.30$$

$T_j = \frac{|b_j|}{S_b}$ T^T=(45.434   13.363 2.673 18.708 2.673 2.673 8.018 2.673)

Ұдайы өндіру дисперсиясының еркіндік дәрежелер саны   f = n0-1,   f = 2

b_j = if [T_j < $Stud_{(f)}$, 0, b_j]

Мағыналы коэффициенттері b^T=(8.5   2.5   0   3.5   0   0   -1.5   0) Сонымен бұл мысалда: $L_{маг}$ = 4

Кохрен критериі тәжірибелердің ұдайы өндірілуін тексеру үшін пайдаланылады (тәжірибелердің ұдайы өндірілу гипотезасын тексеру үшін):

$$G_{ÂÑ} = \frac{S^2_{MAX}}{\sum_{i=1}^{n_0} S_i^2}, \tag{3.8}$$

демек, есептелген G_{EC} мәні дисперсия бағаларының ең үлкенінің табылған барлық дисперсиялар бағаларының қосындысына қатынас ретінде анықталады.

Егер есептелген $G_{EC} > G_{KEC}$, онда дисперсиялар біртекті емес, демек, Y мәндері таралудың нормаль заңына бағынбайды, ал тәжірибелер ұдайы өндірілмейтін болып табылады. S^2_{MAX} - сұрыптау дисперсиялар бағаларының ең үлкені;

n_0 – салыстырылатын дисперсиялардың жалпы саны (параллель (дубль) тәжірибелердің саны);

$\sum_{i=1}^{n_0} S_i^2$ - дисперсиялардың барлық бағаларының қосындысы. Сериядағы тәжірибелердің саны бірдей болуы тиіс, кері жағдайда Бартлетт критерин пайдалануға болады. n0 мен еркіндік дәрежелер санын f = n0–1 білу қажет. Егер тәжірибелер ұдайы өндірілмейтін болса, онда ұдайы өндірілмеудің көздерін (бөгеттерін) анықтап, жоюға әрекет жасауға болады, өлшеу дәлдігін жоғарылатып және с.с. Егер ұдайы өндіруді қамтамасыз ету мүмкін болмаса, онда эксперименттің нәтижелері келесі математикалық өңдеу үшін пайдаланылуы мүмкін емес. Мысалы, (кестені көр), әрқайсысында екі ($n0=2$) параллель тәжірибеден өткізілетін үш сериядан тұратын ($m=3$) экспериментті қарастырайық. Оларда Y шығысы X_1 мен X_2 екі факторға тәуелді.

номера серий опытов	Параллельные опыты				Yi2средн%	Дисперсия Y= Si^2
	Условия опытов		Выходы			
	X_1 гр.С	X_2 %	Y_i1 %	Y_i2 %		
1	24	45	35	36	35,5	0,5
2	24	55	39,3	38,1	38,7	0,72
3	25	45	31,8	33,4	32,6	1,28
					Сумма =	2,5

Кохрен критериінің есептелген мәні $G_{ЕСП}$ = 1.28/2.5 = 0.51, кестеде ($m=3$ және $f=n0–1=1$ *болғанда*) $G_{КЕС}$ = 0.967 табамыз, $G_{ЕСП} < G_{КЕС}$, болғандықтан тәжірибелер ұдайы өндірімді, ал дисперсиялар бағаларын біртекті деп санауға болады.

Ұдайы өндіру дисперсиясының бағасын да есептейік:

$$S^2_{YÄÏ} = \frac{\sum_{i=1}^{n_0}(Y_i - \overline{Y})^2}{n_0 - 1}$$ =(0.50 + 0.72 + 1.28)/3 = 0.83, мұнымен еркіндік дәрежелер саны байланысты $f = m\cdot(n0 - 1) = 3\cdot(2-1) = 3$.

Фишер критериі. Регрессия теңдеуінің адекваттылығын тексеру үшін пайдаланылады.

Фишер критериінің есептелетін мәнін келесідей анықтайды: $F_{ÂÑÏ} = \frac{S^2_{ÊÀËÄ}}{S^2_{YÄÏ}}$

Қалдық дисперсияның бағасын (адекваттылық дисперсиясы): $S^2_{ÊÀËÄ} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \widehat{Y}_i\right)^2}{n - L_{ÌÀÃ}}$

формула бойынша есептейді $\widehat{Y}$ - мағыналы коэффициенттердің негізінде регрессия теңдеуі бойынша есептелген Y-тің мәндері. Егер $F_{ÂÑÏ} \le F_{ÊÂÑ}$ шарты орындалса, онда регрессия теңдеуі эксперименталдық деректерді адекватты сипаттайды. $F_{КЕС}$ еркіндік дәрежелерінің f1 алымы f2 бөлімі үшін белгілі мәндерінде анықталады.

$f1 = n - L_{MAF}$ және $f2 = n0 - 1$. Әдетте мағыналық деңгейі $p=0,05$ пайдаланылады.

Корреляцияның сұрыптау коэффициенті:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \bar{X}\right)\cdot\left(Y_i - \bar{Y}\right)\right]^2}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \cdot \sum_{i}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 \cdot\right]}}$$ немесе $$r^*_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \bar{X}\right)\cdot\left(Y_i - \bar{Y}\right)\right]^2}{(n-1)\cdot S_X \cdot S_Y}$$ [1,121 бет]

[1, 164 бетте] келтірілген мысалды Mathcad-та қарастырайық:

Регрессия теңдеуінің адекваттылығын Фишер критериі бойынша тексеру

Мағыналы коэффициенттері: $b^T = (8.5 \quad 2.5 \quad 0 \quad 3.5 \quad 0 \quad 0 \quad -1.5 \quad 0)$

$Yr_i = b_1 \cdot X_{i,1} + b_2 \cdot X_{i,2} + b_3 \cdot X_{i,3} + b_4 \cdot X_{i,4} + b_5 \cdot X_{i,5} + b_6 \cdot X_{i,6} + b_7 \cdot X_{i,7} + b_8 \cdot X_{i,8}$

Ұдайы өндіру дисперсиясының еркіндік дәрежелер саны $f_2 = n_0 - 1$, $f_2 = 2$

Қалдық дисперсияның еркіндік дәрежелер саны f_1: $= N - 4$, $f_1 = 4$

$$S_0^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - Yr_i\right)^2\right]}{f1}$$ Қалдық дисперсия = $S_0^2 = 2$

$$F = \frac{S_0^2}{S_b^2} \qquad Fisher = \begin{pmatrix} 164.4 & 199.5 & 215.7 & 224.6 & 230.2 \\ 18.50 & 19.20 & 19.20 & 19.30 & 19.30 \\ 10.10 & 9.600 & 9.300 & 9.100 & 9.000 \\ 7.700 & 6.900 & 6.600 & 6.400 & 6.300 \\ 6.600 & 5.800 & 5.400 & 5.200 & 5.100 \end{pmatrix} \qquad Y_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 9 \\ 11 \\ 16 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \\ 18 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$Fisher_{f2,f1} = 19.3$ $\quad F = 7.143$

F < Fisher болғандықтан, теңдеу экспериментті адекватты сипаттайды.

Матрицалық алгебра негіздері (матрицалармен жасалатын операциялар)

Матрица – сандар (немесе сақина элементтерінің) тікбұрышты кестесі түрінде жазылатын және өзі мен және басқа ұқсама объекттер арасында алгебралық (қосі, алу, көбейту) операцияларды орындауға рұқсат ететін математикалық объект. Әдетте матрицалар екіөлшемді (тікбұрышты) кестелер арқылы бейнеленеді. Матрицалық аппаратты пайдалану сызықты математикалық модельдерді пайдаланатын есептеу операцияларын едәуір жеңілдетуге мүмкіндік береді.

Матрицаның әр элементінің екі төменгі индексі бар (a_{ij}) — бірінші «i» элемент орналасқан жолдың нөмірін, ал екінші «j» — бағанның нөмірін белгілейді.

«Өлшемі **m × n** матрица» деп матрица m қатар мен n бағаннан тұратындығын түсінеміз. Мұндай матрицада элементтердің индекстері **0 < i ≤ m** шартын қанағаттандырады, (егер индекстер 1-ден бастап саналатын болса) немесе **0 ≤ i < m** шартын қанағаттандырады, (егер индекстер 0-ден бастап саналатын болса).

Матрицаларға қолданылатын операциялар. $\mathbf{a_{ij}}$ – A матрицаның элементтері, ал $\mathbf{b_{ij}}$ - B матрицаның элементтері болсын.

Сызықты операциялар (ол санға көбейту, қосу және алу).

A матрицаны λ санына көбейту (белгіленуі: λA) мағынасы – элементтері A матрицаның әр элементін осы санға көбейту арқылы алынған B матрицаны құру, яғни, B матрицаның әр элементі: $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

A + B Матрицаларды қосу – элементтері A мен B матрицалардың барлық сәйкес элементтерінің жұптық қосындысына тең болатын C матрицаны табу операциясы, яғни, C матрицаның әр элементі:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Мысалдар:

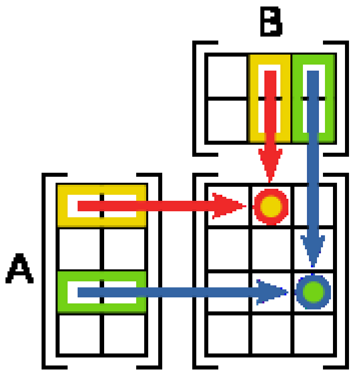
$$A+B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1&0\\8&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3&0+1&-1+0\\1+8&3+2&0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&-1\\9&5&3\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1&0\\8&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3&0-1&-1-0\\1-8&3-2&0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-7&1&-3\end{pmatrix}$$

Бейсызықты операциялар (ол матрицаларды көбейту, дәрежелеу, транспонирлеу, кері матрицаны табу). Матрицаларды көбейту (белгіленуі: AB, кейде көбейту таңбамен A × B) — элементтері бірінші көбейткіштің сәйкес қатарында және екінші көбейткіштің бағанындағы элементтер көбейтінділерінің қосындысына тең болатын C матрицаны есептеу операциясы, яғни:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Бірінші көбейткіштегі бағандар саны екіншідегі қатарлар санына тең болуы тиіс. Егер A матрицаның өлшемі **m × n**, B-ның өлшемі **n × k**, болса, онда олардың көбейтіндісінің AB = C өлшемі: **m × k**. Бұл процедураның схемасы 3.1 суретте көрсетілген



Сурет 3.1 – Матрицаларды көбейту схемасы

Матрицаларды көбейту мысалдары:

$$FL=\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}g&i&k\\h&j&l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a\cdot g+d\cdot h)&(a\cdot i+d\cdot j)&(a\cdot k+d\cdot l)\\(b\cdot g+e\cdot h)&(b\cdot i+e\cdot j)&(b\cdot k+e\cdot l)\\(c\cdot g+f\cdot h)&(c\cdot i+f\cdot j)&(c\cdot k+f\cdot l)\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+3\cdot(-2)&2\cdot2+3\cdot3\\5\cdot(-1)+7\cdot(-2)&5\cdot2+7\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&13\\-19&31\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot2+2\cdot5&-1\cdot3+2\cdot7\\-2\cdot2+3\cdot5&-2\cdot3+3\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&11\\11&5\end{pmatrix}$$

$$A:=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&0\\1&2&3\end{pmatrix}\quad B:=\begin{pmatrix}5&4&-3\\0&9&6\\5&8&3\end{pmatrix}\quad A\cdot B=\begin{pmatrix}20&46&18\\-5&41&33\\20&46&18\end{pmatrix}\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}-2&24&6\\-3&57&18\\0&56&24\end{pmatrix}$$

Тек квадрат матрицаларды ғана дәрежелеуге болады, мысалы:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^3 := \begin{pmatrix} -4 & 118 & 42 \\ -32 & 97 & -27 \\ -4 & 118 & 42 \end{pmatrix} \qquad A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 118 & 42 \\ -32 & 97 & -27 \\ -4 & 118 & 42 \end{pmatrix}$$

Матрицаны транспонирлеу (белгіленуі: A^T) — матрицаны бас диагоналына қатысты бейнелеу операциясы, яғни, $a_{ij}^T = a_{ji}$

Егер А — өлшемі **m×n** матрица болса, онда A^T — өлшемі **n×m** матрица.

Матрицаларға қолданылатын операциялардың қасиеттері:

- қосу ассоциативтілігі: A + (B + C) = (A + B) + C.
- қосу коммутативтілігі: A + B = B + A.
- көбейту ассоциативтілігі: A(BC) = (AB)C.

Жалпы айтқанда матрицаларды көбейту коммутативті емес: AB ≠ BA

Қосу амалына салыстырмалы көбейтудің дистрибутивтілігі: A(B + C) = AB + AC; (B + C)A = BA + CA.

Матрицаларды транспонирлеу операцияның қасиеттері: $(A^T)^T = A$; $(AB)^T = B^T A^T$: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, (егер кері матрица A^{-1} бар болса); $(A+B)^T = A^T + B^T$; $\det A = \det A^T$

Егер матрицаның қатарлар саны бағандар санына тең болса, ондай матрица квадрат матрица деп аталады. Квадрат матрицалар үшін кез-келген матрицаны оған көбейту нәтижеге әсер етпейтіндей, яғни: EA = AE = A бірлік матрица бар (сандарды көбейту операция үшін бірліктің ұқсамасы). Бірлік матрицада бірліктер тек бас диагональ бойында орналасқан, қалған элементтері нөльге тең.

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Кейбір квадрат матрицалар үшін кері матрицаны табуға болады. Кері матрица A^{-1} сондай, егер матрицаны кері матрицаға көбейтсе нәтижеде бірлік матрица пайда болады: $AA^{-1} = E$. Олар үшін кері матрицасы бар матрицалар өзгеше емес (регулярлы), ал олар үшін кері матрицасы жоқтары — өзгеше (сингулярлы) матрица деп аталады. Матрица өзгеше емес, егер оның барлық қатарлары (бағандары) векторлар сияқты сызықты түрде тәуелсіз болса. Сызықты түрде тәуелсіз қатарлардың (бағандардың) максимальды саны матрицаның рангі деп аталады. Матрицаның анықтауышы (детерминант) деп матрицаның бағандарындағы валентігі (p; 0) болатын нормаланған қиқашсимметриялы (антисимметриялы) полисызықты форманың мәні аталады. Сандық өрістің квадратты матрицасының анықтауышы нөльге тең болғанда ғана ол өзгеше болады. Сингулярлы матрицаның анықтауышы нөльге тең немесе нөльге жуық. Әдетте ол матрица элементтері бір-бірінен едәуір (көп есе) айырықшаланған жағдайда орын алады.

Матрицаның сингулярлығы регрессиялық талдау және теңдеулерді шешуге мүмкіндік бермейді.

Сызықты теңдеулер жүйе коэффициенттерінің жазбасы ретіндегі матрица. n белгісіздері бар m теңдеулер жүйесін:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

матрицалық түрде бейнелеуге болады:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Онда бүкіл жүйені: AX = B деп жазуға болады, мұнда: А теңдеулер жүйесінің a_{ij} коэффициенттер кестесінің мағынасына ие. Егер m = n және A матрица регулярлы болса, онда бұл теңдеуді шешу кері A^{-1} матрицаны табуда, себебі теңдеудің екі бөлімін осы матрицаға сол жақтан көбейткенде: $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $A^{-1}A$ — бірлік Е матрицаға айналады. Бұл теңдеулер түбірлерінің бағанын алуға мүмкіндік береді: $X = A^{-1}B$.

Векторлар. Біз векторды – бірөлшемді матрица, яғни, вектор баған мағынасында пайдаланамыз. Векторды бір қатарға жазуды ыңғайлату үшін кейде **B=** жазудың орнына $\mathbf{B^T}$**=** түрдегі жазуды пайдаланады. Векторлар үшін жоғарыда келтірілген матрицаларға қолданылатын операциялардың барлық ережелері әділ, мысалы:

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad X\cdot Y = 34 \quad Y\cdot X = 34 \quad X\cdot Y^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 14 \\ 15 & 12 & 21 \end{pmatrix} \quad X^T\cdot Y = 34$$

Бақылау сұрақтары

1 Ықтималдық теориясы мен сызықтық алгебраның негізгі теориялық бөлімдері;
2 Колмогоров ықтималдық теориясының аксиомалары;
3 Кохрен критерии;
4 Фишердің критерии.

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.

Қосымша әдебиет

3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009
4. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.

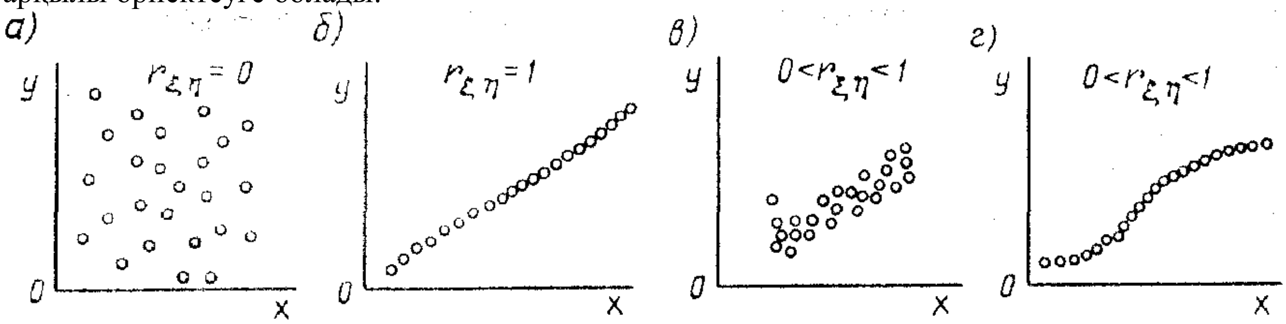
4 лекция Регрессия теңдеуі түріндегі статикалық және динамикалық модельдер (2-ші бөлім)

Мақсаты: лекцияда біз регрессия теңдеуі түріндегі статикалық және динамикалық модельдерді алу үшін пайдаланылатын регрессиялық талдау әдістерін қарастыру.

Тезистер

Модельдеу нәтижелерін корреляциялық талдау

Корреляциялық талдау көмегімен зерттеуші нақтылы S жүйені модельдеуде бақыланатын және фиксацияланатын екі (немесе одан көп) кездейсоқ шамалар арасындағы байланыс қаншалықты тығыз екендігін анықтай алады. Модельдеу нәтижелерін корреляциялық талдау η мәндердің орташа $\bar{y}$ мәнге салыстырмалы шашырауын бағалауға, яғни, корреляциялық байланыс күшін бағалауға келтіріледі. Ол байланыстардың бар болуын және олардың тығыздығын корреляциялық талдау $y = M[\eta/\xi = x]$ схемасы үшін зерттелетін шамалар арасында сызықты байланыс орын алғанда және олардың бірлесіп таралуы қалыпты болғанда корреляция коэффициенті арқылы өрнектеуге болады.



Сурет 4.1 Айнымалылардың корреляциялануының түрлі жағдайлары

S жүйені модельдеу нәтижелерін өңдеуде алынған $r_{\xi\eta}$, бағанын дәлдігін бағалау үшін қарастыруға:

$w=\ln[(1+r_{\xi\eta})/(1-r_{\xi\eta})]/2$

коэффициентті енгізген жөн, сонымен қатар, *w* орта мәні мен дисперсиясы келесідей болатын гаусс таралуына жуықтап бағынады:

$$\mu_w = \ln\left[\left(1+r_{\xi\eta}\right)/\left(1-r_{\xi\eta}\right)\right]/2$$

$$\sigma_w^2 = 1/(N-3)$$

Модельдеу барысындағы жүзеге асырулардың *N* санының корреляция коэффициентіне тигізетін әсеріне байланысты $0 \le r_{\xi\eta} \le 1$ $M_м$. модельдің зерттелетін айнымалыларының арасында статистикалық мағыналы корреляциялық тәуелділіктің бар екендігін шынайы бейнелейтініне көз жеткізу керек. Мұны H_0 гипотезаны тексеру арқылы істеуге болады: $r_{\xi\eta}=0$. Егер талдау барысында H_0 гипотеза жоққа шығарылса, онда корреляциялық тәуелділікті статистикалық мағыналы деп мойындайды. $r_{\xi\eta}= 0$ болғанда қарастыруға енгізілген *w* коэффициенттің іріктелген таралуы $\mu_w = 0$ нөльдік орташасы және $\sigma_w^2 = (N-3)^{-1}$ дисперсиясы бар гаусс таралуы болатыны сөзсіз.

S жүйені модельдеу нәтижелерін талдауда екі айнымалының арасындағы тығыз тәуелділік анықталған болса да, одан олардың себеп-салдарлы өз ара шарттастығың тікелей тұжырымдауға болмайтындығын ескерген маңызды. Келесі жағдай орын алуы мүмкін – кездейсоқ ξ және η шамалар *S* жүйе үшін себеп түрінде тәуелсіз болса да, олар стохастикалық тәуелді болуы мүмкін. Статистикалық модельдеуде осындай тәуелділік, мысалы, x пен y мәндерін есептеу негізіне қойылған оқиғаларды имитациялау үшін пайдаланылатын псевдокездейсоқ сандар тізбектіліктерінің корреляцияланған себебіне байланысты орын алуы мүмкін.

Сонымен, корреляциялық талдау машиналық модельдің зерттелетін кездейсоқ айнымалыларының арасындағы байланысты анықтайды және сол байланыстың тығыздығын бағалайды. Бырақ, осыған қосымша модельдеу нәтижелерін өңдеуден кейін алынған тәуелділікке ие болған жөн.

2 Модельдеу нәтижелерін регрессиялық талдау

Регрессиялық талдау S жүйемен жүргізілген машиналық эксперимент барысында алынған деректер жиынтығына ең жақсы сәйкес болатын модельді құруға мүмкіндік береді. Ең жақсы сәйкестік деп болжамдалатын модель мен эксперименттің деректері арасындағы айырым болатын қатенің минимизацияланған функциясын түсініді. Регрессиялық талдауда қатенің мұндай функциясы болып қателер квадраттарының қосындысы қызмет етеді.

3 Модельдеу нәтижелерін дисперсиялық талдау

Модельдеу нәтижелерін өңдеу және талдау барысында орташа іріктеулерді салыстыру мәселесі жиі пайда болады. Егер мұндай тексеру нәтижесінде кездейсоқ $\{y^{(1)}\}$, $\{y^{(2)}\}$, ..., $\{y^{(n)}\}$ айнымалылар жиынтықтарының математикалық күтімдерінің айырмашылығы шамалы болса, онда модельдеу нәтижесінде алынған статистикалық материалды біртекті деп санауға болады (алғашқы екі моменттерінің тең болған жағдайында). Бұл барлық жиынтықтарды біріктіріп, зерттелетін модель $M_м$, және сондықтан *S* жүйенің қасиеттері туралы ақпаратты едәуір арттыруға мүмкіндік береді.

Регрессиялық және корреляциялық объекттердің статикалық және динамикалық сипаттарын идентификаттауда кең пайдаланылады.

Идентификаттау есебі: регрессия теңдеуінің түрін беріп (мысалы, (2.2) түр), теңдеумен берілген қисық экспериментальды сипаттаманы жеткілікті дәлділікпен сипаттайды деген шарттан сол теңдеудің белгісіз коэффициенттерін анықтау керек.

Бұл есепті шешуде сәйкестік критериі ретінде келесі түрдегі критерийді алады:

$$\min(\mathrm{Fbi}),\quad F(b_i)=\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ýj}-y_{ðj}\right)^2 \qquad (4.1)$$

мұнда: $y_{ýj}$ – экспериментальды мән; $y_{ðj}$ – есептелген мән.

bi коэффициенттерін табу үшін келесі теңдеуді құрады:

$$\frac{\partial F}{\partial b_i}=0 \qquad (4.2)$$

Сонымен, оны шешу арқылы b_i –ді анықтауға болатын теңдеулер жүйесі пайда болады.

Нақтылы жағдайда, полином түрін таңдау үшін экспериментальды сұрыптаудың графикалық бейнеленуін және сонымен қатар, априорлы жанама деректерді пайдаланады.

Регрессия теңдеуі: $\hat{y}_i=b_0+b_1\cdot x_i$ квадрат полином түрінде таңдап алынған жағдай үшін осы әдісті пайдалану мысалын крастырайық.

Бір параметрден сызықтық регрессия.

Бұл әдіс көмегімен түрі эксперименталды y_i және есептелген $\hat{y}$ мәндер арасындағы айырмаларының квадраттарының қосындысы болатын (4.1) функцияның минимумы ізделінеді:

$$\hat{y}_i = F(x_i) = b_0 + b_1 \cdot x_i \tag{4.3}$$

$$I(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - y_i \right]^2 \to \min \tag{4.4}$$

Минимизациялау b коэффициенттерін өзгерту арқылы іске асырылады, яғни, оларды теңдеуге қойғанда I(b) минималды болатындай b_0 мен b_1 іздейміз. $I(b_i)$ функциясы минимум болуына қажетті шарты - келесі шарттың орындалғаны:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial b_0} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - y_i] \cdot \frac{\partial F(x_i)}{\partial b_0} = 0 \\ \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial b_1} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - y_i] \cdot \frac{\partial F(x_i)}{\partial b_1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Бұл екі белгісіз мүшесі бар екі теңдеу жүйесін шешу оларда I(b) минималды болатын b_0 мен b_1 үшін өрнектерді табуға мүмкіндік береді.

$\frac{\partial F(x_i)}{\partial b_0} = x_i$ және $\frac{\partial F(x_i)}{\partial b_1} = 1$ ескере отырып, теңдеулер жүйесі келесі түрді қабылдайды:

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(b_0 + b_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i \right] = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[b_0 + b_1 \cdot x_i - y_i \right] = 0 \end{aligned}\right\}$$

немесе (оларды шешу арқылы b0 мен b1 табатын нормаль теңдеулер жүйесі):

$$\left.\begin{aligned} b_0 \cdot \sum x_i + b_1 \cdot \sum x_i^2 = \sum x_i \cdot y_i \\ b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum x_i = \sum y_i \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

осыдан

$$b_0 = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{4.7}$$

және

$$b_1 = \frac{n \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{4.8}$$

немесе одан да оңай, алдымен b_1 тауып алып, одан соң $b_0 = \bar{Y} - b_1 \cdot \bar{X}$ осы теңдеуден b_1 мен b_0 арасында корреляциялық тәуелділік бар екендігі көрінеді. Сызықтық байланыс күшін бағалау үшін корреляцияның сұрыптау коэффициенттін есептеуге болады:

$$r = b_1 \cdot \sqrt{\frac{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n \cdot \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}} \tag{4.9}$$

Пайдалану мысалы [1, 130 бет]

Жиындық корреляция әдісі бірнеше кірістері бар (k – кірістер (факторлар) саны) объекттерді идентификаттауда пайдаланылады. k=1 болғанда – (2.1) теңдеу сызық графигі, k=2 – жазықтық графигі, k=3 – гиперкеңістік

Бастапқы статистикалық материал келесі кестеде келтірілген. Оның N қатары және k+2 бағаны бар.

Кесте 4.1

k-кірістері бар математикалық модельді алу үшін бастапқы деректер

№	X_0	X_1	X_2	X_3	…	Y
1	$x_{01}=1$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	y_1
2	$x_{21}=1$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	y_2
3	$x_{31}=1$	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	y_3
4	$x_{41}=1$	x_{41}	x_{42}	x_{43}	…	y_4
…	…	…	…	…	…	…
N	$x_{n1}=1$	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	y_n

X_0 – бірге тең жалған (фиктивті) айнымалы, ол жазуды ыңғайлату үшін енгізілген. X_1 бағаны – нөмірі 1-ші кірістің мәндері, X_2 бағаны – нөмірі 2-ші кірістің мәндері және с.с. Y бағаны - N опыттардың әрқайсысындағы шығыстардың мәндері.

N опыттардың саны жеткілікті түрде көп болуы тиіс. Опыттар санын эксперименттерді жоспарлау әдістерін пайдаланып азайтуға болады (келесі лекция).

Нормальды теңдеулер жүйесі сызықты жағдайға ұқсама (4.10) түрге ие.

$$\left.\begin{array}{l}
b_0\sum X_0^2 \quad + b_1\sum X_0X_1 + b_2\sum X_0X_2 + \cdots + b_k\sum X_0X_k = \sum X_0Y \\
b_0\sum X_1X_0 + b_1\sum X_1^2 \quad + b_2\sum X_1X_2 + \cdots + b_k\sum X_1X_k = \sum X_1Y \\
b_0\sum X_2X_0 + b_1\sum X_2X_1 + b_2\sum X_2^2 \quad + \cdots + b_k\sum X_2X_k = \sum X_2Y \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_0\sum X_kX_0 + b_1\sum X_kX_1 + b_2\sum X_kX_2 + \cdots + b_k\sum X_k^2 \quad = \sum X_kY
\end{array}\right\}$$

(4.10)

Байқалып тұрғандай, бұл теңдеулер жүйесі реттелген құрылысқа ие, сондықтан k факторлардың кез келген саны үшін оңай құрылуы мүмкін. Бұл k+1 белгісіздері бар k+1 теңдеулер жүйесінде әр теңдеудің сол жағында k+1 қосылғыштары бар. Егер реті бір ден жоғары полином түріндегі модель пайдаланылған жағдайда, регрессияның сызықты емес мүшелері өзіндік айнымалылар ретінде қарастырылады.

k=2 және

$$\widehat{Y} = b_0 + b_1\cdot X_1 + b_2\cdot X_2 + b_{11}\cdot X_1^2 + b_{22}\cdot X_2^2 + b_{12}\cdot X_1X_2 .$$

(4.1)

түрдегі теңдеу модельдің коэффициенттері ізделінетін мысалды қарастырайық.

Базалық ретінде келесі модель алынады:

$$\begin{array}{l} \quad\quad\; 1 \qquad\quad 2 \qquad\quad 3 \qquad\quad 4 \qquad\quad 5 \qquad\quad 6 \\ \widehat{Y} = b_0\cdot X_0 + b_1\cdot X_1 + b_2\cdot X_2 + b_{11}\cdot X_3 + b_{22}\cdot X_4 + b_{12}\cdot X_5 \end{array}$$

(4.12)

Бастапқы статистикалық материал келесі кестеде келтірілген:

№	X_0	X_1	X_2	$X_3=$ X^2_1	$X_4=$ X^2_2	$X_5=$ X_1X_2	Y
1	1	x_{11}	x_{12}	$x_{11}x_{12}$	x^2_{11}	x^2_{12}	y_1
2	1	x_{21}	x_{22}	$x_{21}x_{22}$	x^2_{21}	x^2_{22}	y_2
3	1	x_{31}	x_{32}	$x_{31}x_{32}$	x^2_{31}	x^2_{32}	y_3
4	1	x_{41}	x_{42}	$x_{41}x_{42}$	x^2_{41}	x^2_{42}	y_4
…	…	…	…	…	…	…	…
n	1	x_{n1}	x_{n2}	$x_{n1}x_{n2}$	x^2_{n1}	x^2_{n2}	y_n

Мұнда кестенің ерекшеленген бөлігі – нақтылы эксперимент, кестенің қалған бөлігі есептеулер арқылы толтырылады.

Нормаль теңдеулер жүйесінің түрі алдыңғы жағдайға ұқсас:

$$\left.\begin{array}{l}
b_0\sum X_0^2 \;+ b_1\sum X_0X_1 \;+ b_2\sum X_0X_2 + \;b_{11}\sum X_0X_1^2 + \\
\qquad + b_{22}\sum X_0X_2^2 + b_{12}\sum X_0X_1X_2 = \sum X_0Y \\
b_0\sum X_1X_0 + b_1\sum X_1^2 \qquad + b_2\sum X_1X_2 \;+ b_{11}\sum X_1X_1^2 + \\
\qquad + b_{22}\sum X_1X_2^2 \;+ b_{12}\sum X_1^2X_2 = \quad \sum X_1Y \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_0\sum X_0X_1X_2 \quad + b_1\sum X_1^2X_2 \quad + b_2\sum X_1X_2^2 \;+ b_{11}\sum X_1^3X_2 + \\
\qquad b_{22}\sum X_1X_2^3 \quad + b_{12}\sum X_1^2X_2^2 = \sum X_1X_2Y
\end{array}\right\} \qquad (4.13)$$

b_i коэффициенттері осы жүйені шешу арқылы табылады, оны матрицалық формада жасау жеңілдеу.

Матрицалық формадағы регрессиялық талдау. ([1] 146 б.)

Матрицалық форманы пайдалану жазылудың өзімен қатар регрессия теңдеуінің коэффициенттерін анықтау есебін шешуді де көп оңайлатады. Келесі белгілеулерді енгізейік (4.1 кесені қара):

1) Тәуелсіз X айнымалыларының матрицасы – бастапқы статистикалық материалды қамтиды (алдыңғы тақырыптағы кестенің соңғы бағанынан басқаларын қара) ол жерде n – жол және k+1 баған бар:

2) Бақылаулар матрицасы (вектор) Y (вектор – баған): оның n – жолы бар.

X және Y мәндері жүргізілген белсенді емес тәжірибе нәтижесінен белгілі.

3) Регрессия теңдеуінің B коэффициенттер матрицасы (вектор): ол k+1 – жолдан тұрады.

Мақсатымыз белгілі X пен Y арқылы (4.15) формула бойынша B анықтау.

Кесте 4.1

Регрессиялық талдауда матрицалық жазба элементтері

$X=\begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix}$	$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix}$	$(X^T \cdot X)^{-1}=\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k0} & c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{bmatrix}$
Матрица входов – факторы, независимые параметры	**Вектор выходов (наблюдений)**	**Вектор коэффициентов**	**Ковариационная матрица, матрица ошибок**

$(X^T \cdot X)$ матрицасын ақпараттық (информационная) матрица деп атайды (моменттер матрицасы), ал $(X^T \cdot X)^{-1}$ қателер матрицасы немесе ковариациялық матрица.

Нормаль теңдеулер жүйесі матрицалық формада келесідей жазылады:

$$X^T XB = X^T Y \tag{4.14}$$

Бұл теңдеу шешімінің түрі:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{4.15}$$

(4.15) теңдеуі оңай жүзеге асырылады, мысалы Mathcad-та және сонымен қатар, экспериментті жоспарлау әдістерінде кеңінен пайдаланылады. Бырақ, кейде B коэффициенттер векторын $(X^T \cdot X)$ матрицаның өзгешеленуіне байланысты есептеу мүмкін емес. Мұндай жағдай орын алуы мүмкін, егер X матрицаның элементтері бір-бірінен өте қатты айырмашыланатын болса. Мысалы, элементтердің біреуі 0.00005, ал екіншісі 100000.0 тең болса.

Қалдық дисперсияны анықтау үшін баған-матрицаны анықтайды:

$$\hat{Y} = X \cdot B \tag{4.16}$$

Қалдық дисперсияның алымын келесі формула бойынша алады:

$$\left(Y-\hat{Y}\right)^T \cdot \left(Y-\hat{Y}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(Y-\hat{Y}\right)^2 \tag{4.17}$$

Үш кірісі және бір шығысы бар (2.2) түрдегі математикалық модельді құру үшін регрессиялық талдауды пайдалану мысалын қарастырайық:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1^2 + b_{22} \cdot X_2^2 + b_{33} \cdot X_3^2 \\ &+ b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3\end{aligned} \tag{2.2}$$

Немесе келесі түрде:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= b_1 + b_2 \cdot X_1 + b_3 \cdot X_2 + b_4 \cdot X_3 + b_5 \cdot X_1^2 + b_6 \cdot X_2^2 + b_7 \cdot X_3^2 \\ &+ b_8 \cdot X_1 \cdot X_2 + b_9 \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{10} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3\end{aligned} \tag{2.2A}$$

Математикалық модельді құру үшін бастапқы деректер 4.2 кестеде келтірілген. Эксперимент негізінде 2 баған (Y – шығыстың мәндері) және 4-6 бағандар (X_1, X_2 және X_3 кіірстердің мәндері) толтырылған. Бұл мәндер кестеде қалын шрифтпен ерекшеленген.

3-ші баған 1-ге тең мәндермен, ал 7-13 бағандар 4-6 бағандар негізінде есептелген мәндермен толтырылған. 20 тәжірибе жүргізілген.

Кесте 4.2

Математикалық модельді құру мысалы үшін бастапқы деректер

№	Y-		Входы - X	Условные входы, рассчитанные на основе входов X

оп	Выход	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_1*X_2	X_1*X_3	X_2*X_3	$X_1X_2X_3$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	**43,0**	1	**90**	**3**	**120**	8100	9	14400	270,000	10800,000	360,000	32400
2	**44,0**	1	**110**	**3**	**120**	12100	9	14400	330,000	13200,000	360,000	39600
3	**40,0**	1	**90**	**7**	**120**	8100	49	14400	630,000	10800,000	840,000	75600
4	**38,0**	1	**110**	**7**	**120**	12100	49	14400	770,000	13200,000	840,000	92400
5	**45,0**	1	**90**	**3**	**150**	8100	9	22500	270,000	13500,000	450,000	40500
6	**43,0**	1	**110**	**3**	**150**	12100	9	22500	330,000	16500,000	450,000	49500
7	**44,0**	1	**90**	**7**	**150**	8100	49	22500	630,000	13500,000	1050,000	94500
8	**42,0**	1	**110**	**7**	**150**	12100	49	22500	770,000	16500,000	1050,000	115500
9	**44,0**	1	**83,18**	**5,00**	**135,**	6918,9	25	18225	415,900	11229,300	675,000	56146,5
10	**41,0**	1	**116,8**	**5,00**	**135**	13642	25	18225	584,000	15768,000	675,000	78840
11	**43,0**	1	**100**	**1,64**	**135**	10000	2,6766	18225	163,600	13500,000	220,860	22086
12	**37,0**	1	**100**	**8,36**	**135**	10000	69,955	18225	836,400	13500,000	1129,140	112914
13	**45,0**	1	**100**	**5,00**	**109,7**	10000	25	12049,45	500,000	10977,000	548,850	54885
14	**48,0**	1	**100**	**5,00**	**160,3**	10000	25	25673,65	500,000	16023,000	801,150	80115
15	**47,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
16	**45,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
17	**46,5**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
18	**45,5**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
19	**46,7**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
20	**46,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500

Сонымен, келесі мәндерге ие болатын Y вектордың (баған 2) және X матрицаның (3-13 бағандар) мәндері берілген:

$Y^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	43	44	40	38	45	43	44	42	44	41	43	37	45	48	47	45	46.5	45.5	46.7	46

$X =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	90	3	120	8100	9	14400	270	10800	360	32400
2	1	110	3	120	12100	9	14400	330	13200	360	39600
3	1	90	7	120	8100	49	14400	630	10800	840	75600
4	1	110	7	120	12100	49	14400	770	13200	840	92400
5	1	90	3	150	8100	9	22500	270	13500	450	40500
6	1	110	3	150	12100	9	22500	330	16500	450	49500
7	1	90	7	150	8100	49	22500	630	13500	1050	94500
8	1	110	7	150	12100	49	22500	770	16500	1050	115500
9	1	83.18	5	135	6918.912	25	18225	415.9	11229.3	675	56146.5
10	1	116.8	5	135	13642.24	25	18225	584	15768	675	78840
11	1	100	1.636	135	10000	2.676	18225	163.6	13500	220.86	22086
12	1	100	8.364	135	10000	69.956	18225	836.4	13500	1129.14	112914
13	1	100	5	109.77	10000	25	12049.453	500	10977	548.85	54885
14	1	100	5	160.23	10000	25	25673.653	500	16023	801.15	80115
15	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
16	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
17	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
18	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
19	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
20	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500

Одан кейін мысалы, Mathcad-та (4.15) формула бойынша $B=(X^T X)^{-1} X^T Y$ есептеп, B коэффициенттердің онбір мәндерінің векторын аламыз:

$B^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-207.44742	3.94528	19.67478	0.74521	-0.01372	-0.56344	0.00019	-0.18750	-0.00875	-0.09583	0.00125

Нәтижелері 4.3 кестеге түсірілген тексеруді орындауға болады. (2.2А) формуланы немесе (4.16) түрдегі: $\hat{Y} = X \cdot B$ оның матрицалық ұқсамасын пайдаланып шығыстың есептелген $\hat{Y}$ мәнін алуға болады. Пайда болған математикалық модельді адекватты деп санауға болады, себебі R^2 = 0,9724 критерийдің мәні бірлікке жеткілікті түрде жақын.

Кесте 4.3

Математикалық модельдің адекваттылығын тексеру нәтижесі

№ опыта	Входные переменные			Выход		Погрешность (ошибка)	
	X_1	X_2	X_3	Y	$\hat{Y}$	абсолютная	относительная %
1	120,00	3,00	120,00	43,000	43,5514	-0,5514	-1,2823
2	120,00	3,00	120,00	44,000	44,3277	-0,3277	-0,7448
3	120,00	7,00	120,00	40,000	40,2128	-0,2128	-0,5321
4	120,00	7,00	120,00	38,000	37,9892	0,0108	0,0285
5	150,00	3,00	150,00	45,000	45,3582	-0,3582	-0,7959
6	150,00	3,00	150,00	43,000	43,1345	-0,1345	-0,3127
7	150,00	7,00	150,00	44,000	44,0196	-0,0196	-0,0446
8	150,00	7,00	150,00	42,000	41,7959	0,2041	0,4858
9	135,00	5,00	135,00	44,000	43,4885	0,5115	1,1625
10	135,00	5,00	135,00	41,000	41,0205	-0,0205	-0,0499

11	135,00	1,64	135,00	43,000	42,3519	0,6481	1,5072
12	135,00	8,36	135,00	37,000	37,1570	-0,1570	-0,4243
13	109,77	5,00	109,77	45,000	44,5247	0,4753	1,0562
14	160,23	5,00	160,23	48,000	47,9842	0,0158	0,0329
15	135,00	5,00	135,00	47,000	46,1306	0,8694	1,8497
16	135,00	5,00	135,00	45,000	46,1306	-1,1306	-2,5125
17	135,00	5,00	135,00	46,500	46,1306	0,3694	0,7943
18	135,00	5,00	135,00	45,500	46,1306	-0,6306	-1,3860
19	135,00	5,00	135,00	46,700	46,1306	0,5694	1,2192
20	135,00	5,00	135,00	46,000	46,1306	-0,1306	-0,2840
Суммарная ошибка =						1,0851E-07	-0,2330
Среднее значение ошибки =						5,4256E-09	**-0,0117**
Значение критерия Rквадрат =						**0,9724**	

Сызықты динамикалық жүйелерді идентификаттаудың регрессиялық әдісі (Ең кіші квадраттар әдісі)

Келесі теңдеуді қарастырайық:

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+a_1\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a_2\frac{d\ \ x(t)}{dt}+a_3x(t)=b\sin(ct), \tag{4.21}$$

Теңдеуде туындыны ақырлы айырыммен алмастырайық:

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{x_{i+2}-3x_{i+1}+3x_i-x_{i-1}}{\Delta t^3}, \tag{4.22}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2}, \tag{4.23}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}, \tag{4.24}$$

(4.22)-(4.24) өрнектерді (4.21) теңдеуге қоямыз:

$$\frac{x_{i+2}-3x_{i+1}+3x_i-x_{i-1}}{\Delta t^3}+a_1\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2}+a_2\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}+a_3x_i=u, \tag{4.25}$$

Ұқсас мүшелерді келтіріп, келесіні аламыз:

$$x_{i+2}=\left(3-a_1\Delta t-a_2\Delta t^2\right)x_{i+1}-\left(3-2a_1\Delta t-a_2\Delta t^2-a_3\Delta t^3\right)x_i+\left(1-a_1\Delta t\right)x_{i-1}+u\Delta t^3, \tag{4.26}$$

(4.26)-ны келесі түрде бейнелейік:

$$x_{i+2}=\alpha_0x_{i+1}+\alpha_1x_i+\alpha_2x_{i-1}+\alpha_3u, \tag{4.27}$$

мұнда: $\alpha_0=\left(3-a_1\Delta t-a_2\Delta t^2\right)$; $\alpha_1=\left(3-2a_1\Delta t-a_2\Delta t^2-a_3\Delta t^3\right)$, $\alpha_2=\left(1-a_1\Delta t\right)$, $\alpha_3=\Delta t^3$.

Идентификаттаудың қарастырылатын әдісі ең кіші квадраттар әдісін қолданатын регрессиялық процедураларға негізделген.

Келесі теңдеумен берілген жүйені қарастырамыз:

$$x_{i+2}=\alpha_0x_{i+1}+\alpha_1x_i+\alpha_2x_{i-1}+u$$

Минимизацияланатын функция келесі түрге ие:

$$F=\sum_{j=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2}-(\alpha_0x_{i+1}+\alpha_1x_i+\alpha_2x_{i-1}+u))^2$$

(4.28)

α_i-ді табуға арналған теңдеулер жүйесін жазайық, ол үшін дербес туындыларды табамыз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_0} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2} - \alpha_0 x_{i+1} - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_{i-1} - \alpha_3 u)x_{i+1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2} - \alpha_0 x_{i+1} - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_{i-1} - \alpha_3 u)x_i = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_2} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2} - \alpha_0 x_{i+1} - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_{i-1} - \alpha_3 u)x_{i-1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_3} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2} - \alpha_0 x_{i+1} - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_{i-1} - \alpha_3 u)u_i = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+2}x_{i+1} - \alpha_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}^2 - \alpha_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} - \alpha_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}x_{i+1} - \alpha_3\sum\limits_{i=1}^{n} u x_{i+1} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+2}x_i - \alpha_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}x_i - \alpha_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \alpha_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i - \alpha_3\sum\limits_{i=1}^{n} u x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+2}x_{i-1} - \alpha_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}x_{i-1} - \alpha_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{i-1} - \alpha_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 x_{i+1} - \alpha_3\sum\limits_{i=1}^{n} u x_{i-1} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+2}u_i - \alpha_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}u_i - \alpha_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i - \alpha_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}u_i - \alpha_3\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 = 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

Жүйені матрицалық формада жазайық:

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} & \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}x_{i+1} & \sum\limits_{i=1}^{n} u_i x_{i+1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} u_i x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}x_{i-1} & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{i-1} & \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} u_i x_{i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}u_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}u_i & \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+2}x_{i+1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+2}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+2}x_{i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+2}u_i \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

$$X \cdot \alpha = y \Rightarrow \alpha = X^{-1} \cdot y \tag{4.32}$$

Алынған α-лар бойынша a_i коэффициенттерін табамыз:

$$a_1 = \frac{1-\alpha_2}{\Delta t}; \quad a_2 = \frac{2+\alpha_2-\alpha_0}{\Delta t^2}; \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-1}{\Delta t^3}.$$

Бақылау сұрақтары

1 модельдеу нәтижелерін корреляциялық талдау;
2 регрессиялық модельдеу нәтижелерін талдау;
3 модельдеу нәтижелерін дисперсиялық талдау;
4 бір параметрден сызықтық регрессия;
5 матрицалық формадағы регрессиялық талдау;
6 сызықтық динамикалық жүйелерді анықтаудың регрессиялық әдісі.

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

5 лекция Регрессия теңдеуі түріндегі статикалық және динамикалық модельдер (3-ші бөлім)

Мақсаты: лекцияда идентификациялау есептерін тәжірибелік шешуде пайдаланылатын дисперсиялық талдау, кездейсоқ шамалардың таралу параметрлерін статистикалық бағалау және статистикалық гипотезаларды тексеру теория элементтерін қарастыру.

Тезистер

Идентификаттауда пайдаланылатын талдау әдістерінің тағайындамасын қысқаша атап шығайық:

- **Дисперсиялық талдау** бір немесе бірнеше сапалық айнымалылардың (факторлардың) бір тәуелді мөлшерлік айнымалыға (қайтарымға) тигізетін әсерін зерттеу үшін пайдаланылады.
- **Уақыттық қатарларды талдау** жеке немесе байланысқан уақыттық қатарларға пайдаланылады және уақыттық үрдістердің периодтылығы мен өзара әсерлерінің түрлі формаларын ерекшелеуге, сонымен қатар, уақыттық қатардың болашақ тәртібін болжауға мүмкіндік береді.
- **Регрессиялық процедуралар** кейбір теңдеумен сипатталатын және экспериментальды мөлшерлік айнымалылар арасындағы функциональдық тәуелділікті бейнелейтін модельді есептеуге мүмкіндік береді, және сонымен қатар, модельдің экспериментальдық деректерге адекваттылығы туралы гипотезаны тексереді.
- **Корреляциялық талдау** – ол сұрыптаулар арасындағы құрылымдық тәуелділіктерді анықтауға және математикалық түрде бейнелеуге бағытталған статистикалық әдістер тобы.
- **Кластерлік талдау** объекттерді бір-бірінен қашықтатылған класстардың берілген санына жіктеуді іске асырады, және сонымен қатар, оларды топтарға (кластерлерге) иерархиялық біріктіру арқылы объекттер классификацияларының ағашын құрады.
- **Факторлық талдаудың** негізгі есебі бастапқы (мәндері экспериментте тіркелетін) айнымалылардың көпөлшемді кеңістігінде екінші айнымалылардың (факторлардың) қысқартылған жүйесін табу болып табылады.
- **Сапаны бақылау** әдістері өнім сапасының төмендеуіне әкелетін өндірісті ұйымдастырудағы және технологиялық үрдістердегі тар жерлерді және бұзылымдарды анықтау мақсатында шығарылатын өнімді бақылау үшін арналған.

Дисперсиялық талдау (латынша Dispersio – шашырау / ағылшынша Analysis Of Variance - ANOVA) бір немесе бірнеше сапалық айнымалылардың (факторлардың) бір тәуелді мөлшерлік айнымалыға (қайтарымға) тигізетін әсерін зерттеу үшін пайдаланылады.

Дисперсиялық талдаудың негізінде бір айнымалылар себептер ретінде (факторлар, тәуелсіз айнымалылар), ал екіншілері салдар (тәуелді айнымалылар) ретінде қарастырылуы мүмкін болатын болжау жатыр. Тәуелсіз айнымалыларды кейде реттелетін факторлар деп атайтын себебі, экспериментте зерттеуші оларды өзгертіп, пайда болатын нәтижені талдай алады.

Дисперсиялық талдаудың басты мақсаты – дисперсияларды салыстыру (талдау) арқылы орта мәндердің арасындағы айырмашылықтардың мағыналығын зерттеу. Жалпы дисперсияны бірнеше көздерге жіктеу топтардың арасындағы айырмашылықтан туындылаған дисперсияны топтардың ішіндегі өзгерушіліктен туындылаған дисперсиямен салыстыруға мүмкіндік береді. Нөльдік (бас жиынтықтан таңдап алынған бақылаулардың бірнеше топтарындағы орта мәндердің теңдігі туралы) гипотеза ақиқат болғанда топ ішіндегі өзгерушілікпен байланысты дисперсия бағасы топтар арасындағы дисперсия бағасы на жақын болуы тиіс.

F— Фишер критериі арқылы дисперсия компоненттерін бір-бірімен салыстыра отырып, нәтижелі белгінің жалпы вариациялығының қандай үлесі реттелетін факторлардың әсерімен негізделгенін анықтауға болады.

Дисперсиялық талдау үшін бастапқы материал болып үш және одан көп сұрыптауларды зерттеулер деректері қызмет атқарады. Анықталатын реттелетін факторлардың саны бойынша дисперсиялық талдау бірфакторлық (бұл жағдайда бір фактордың эксперимент нәтижелеріне тигізетін әсері зерттеледі), екіфакторлық (екі фактордың әсерін зерттеудіе және көпфакторлық (әр фактордың жеке тигізетін әсерімен қатар олардың өзара әрекеттесулерін де анықтауға мүмкіндік береді) болуы мүмкін.

Дисперсиялық талдау параметрлік әдістер қатарына жатады, сондықтан оны таралу қалыпты екендігін дәлелдегенде ғана пайдалану керек.

Теориялық негіздер. Кез-келген экспериментте бақыланатын шамалардың орташа мәні эксперимент шарттарын анықтаушы кіріс факторлардың және сонымен қатар, кездейсоқ факторлардың (бөгеуілдердің) өзгеруіне байланысты өзгереді. Сол сияқты факторлардың орташа мәндердің өзгеріліміне тигізетін әсерлерін зерттеу дисперсиялық талдаудың мәселесі болып табылады.

Дисперсиялық талдаудың мағынасы – зерттелетін кездейсоқ шаманың өзгеруіне әкелетін жеке факторларды ерекшелеу және бағалауда. Ол үшін қосындыланған сұрыптамалы дисперсияны тәуелсіз факторлармен негізделген құрамдастарға жіктеу орындалады.

Берілген фактор әсерінің мағыналығын анықтау үшін кездейсоқ факторларға негізделген ұдайы өндіру дисперсиясына сәйкес сәйкесінше сұрыптамалы дисперсияның мағыналығын бағалау керек.

Эксперименттің нәтижесі түрлі n мәндерді қабылдайтын (n-опыттардың сериялар саны) кейбір жеке А факторға тәуелді болсын. опыттардың әр сериясы үшін қайталанатын лар m бақылаулар жүргізіледі, олардың нәтижелерін келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{array}{l} Y_{11}\ Y_{12}\ Y_{13}\ \ldots\ Y_{1m} \\ Y_{21}\ Y_{22}\ Y_{23}\ \ldots\ Y_{2m} \\ Y_{31}\ Y_{32}\ Y_{33}\ \ldots\ Y_{3m} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ Y_{n1}\ Y_{n2}\ Y_{n3}\ \ldots\ Y_{nm} \end{array}$$

Алынған статистикалық деректердің негізінде әр нақтылы серия үшін математикалық күтімдердің теңдігі туралы гипотезаны тексеру талап етіледі. Егер тексерілетін гипотеза дұрыс болса, онда барлық сериялар үшін орташа арифметикалық мәндердің бір-бірінен айтарлықтай айырмашылығы жоқ, кері жағдайда болжамдалатын гипотезадан бас тарту керек.

$\bar{Y}_i$ арқылы опыттардың і-ші сериясының орташа мәнін, ал $\bar{Y}$ арқылы барлық бақылаулар орташа мәнді белгілейік:

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m} Y_{ji} \tag{5.1}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{m\cdot n}\cdot\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} Y_{ji}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2\right\} + \left\{m\cdot\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\right\} \tag{5.2}$$

Дисперсиялық талдаудың мағынасы – жеке Y_{ij} –дің жалпы орташадан ауытқулар квадраттарының қосындысын екі қосындыға жіктеуде.

Q - әр опыттың (Y_{ij}) мәнінің орташадан жалпы ауытқуын анықтайды;

Q_A - А фактордың әсерінен туындылаған шашырауды сипаттайды (екінші фигуралық жақшалардағы өрнек);

$Q_{калд}$ – кездейсоқ бөгеуілдердің әсерінен туындылаған шашырауды сипаттайды (бірінші фигуралық жақшалардағы өрнек).

Ауытқулар квадраттарының қосындысын сәйкесінше еркіндік дәрежелеріне бөліп, келесі дисперсияларды аламыз:

$$\sigma^2 = Q / f$$

$$\sigma_A^2 = Q_A / f_1 \tag{5.3}$$

$$\sigma_{\text{êàëä}}^2 = Q_{\text{êàëä}} / f_2$$

Еркіндік дәрежелер саны: $f = m\cdot n - 1$; $f_1 = n - 1$; $f_2 = n\cdot(m-1)$

Дисперсиялық талдауды орындау мағынасы - σ_A^2 және $\sigma_{\text{êàëä}}^2$ бағаларын салыстыруда. Егер әр серия үшін математикалық күтімдер тең туралы гипотеза дұрыс болса, онда σ_A^2 $\sigma_{\text{êàëä}}^2$-тан көп аспауы тиіс, ол Фишер критерийі бойынша тексеріледі.

$$F = \sigma_A^2 / \sigma_{\text{êàëä}}^2 \tag{5.4}$$

Егер $F < F_{кр}$ болса, онда σ_A^2 және $\sigma_{\text{êàëä}}^2$ арасындағы айырмашылықты маңызды емес деп санауға болады, яғни, А фактордың әсері кездейсоқ бөгеуілдердің әсерімен салыстырмалы.

Егер $F > F_{кр}$ болса, онда σ_A^2 және $\sigma_{\text{êàëä}}^2$ арасындағы айырмашылық маңызды, яғни, А фактор шығыс шамаға әсер тигізеді.

$F_{кр}$ мәнін α ("альфа") мағыналық деңгейінде және f_1 мен f_2 еркіндік дәрежелерінде Фишер таралуының квантильдері бойынша анықтайды:

$$F_{кр} = f(\alpha, f_1, f_2)$$

Кездейсоқ шамалар параметрлерін статистикалық бағалау. Гипотезаларды тексеру

Статистикалық гипотеза (statistical hypothesys) — ол деректердің бақыланатын сұрыптау негізінде жататын ықтималдықтардың таралуы туралы белгілі бір болжам.

Статистикалық гипотеза тексеру (testing statistical hypotheses) — ол қарастырылатын статистикалық гипотеза деректердің бақыланатын сұрыптамасына қайшылық болу-болмау туралы шешім қабылдау үрдісі. Статистикалық тест немесе статистикалық критерий — ол бойынша статистикалық гипотеза қабылданатын немесе қабылданбайтың қатаң математикалық ереже.

Статистикалық гипотеза сұрыптаудың негізінде тұжырымдалатын кездейсоқ шаманың таралу заңы немесе сол заңдың параметрлері туралы кейбір болжам

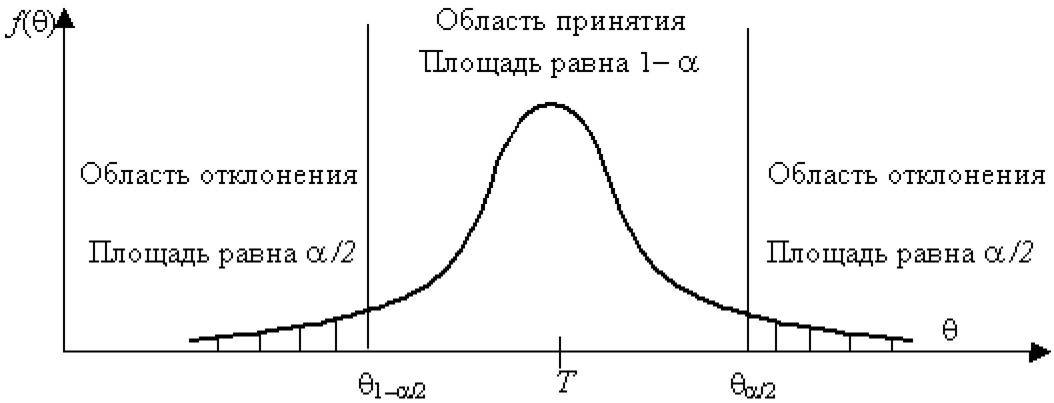
Салыстырылатын сипаттамалар арасында айырмашылық жоқ, ал бақыланатын ауытқулар олардың негізінде салыстыру жүргізілетін сұрыптаулардағы кездейсоқ тербелістермен ғана түсіндіріледі деп тұжырымдайтын гипотеза нөльдік (негізгі) гипотеза деп аталады, оны H_0 деп белгілейді. Негізгі мен қатар оған баламалы (бәсекелес, қарсы) гипотезаны H_1 қарастырады. Егер нөльдік гипотеза қабылданбаса, онда баламалы гипотеза орын алады.

Гипотезаны тексеру барысында нәтижелердің төрт нұсқасы болуы мүмкін, кесте 5.1.

Кесте 5.1
Нәтижелердің төрт нұсқасы

Гипотеза H_0	Решение	Вероятность	Примечание
Верна	Принимается	$1-\alpha$	Доверительная вероятность
	Отвергается	α	Вероятность ошибки первого рода
Неверна	Принимается	β	Вероятность ошибки второго рода
	Отвергается	$1-\beta$	Мощность критерия

Мысалы, θ параметрдің кейбір ығыспаған бағасы көлемі *n* сұрыптама бойынша есептелген және ол бағаның таралу тығыздығы $f(\theta)$ болған жағдайды қарастырайық, сурет 5.1.

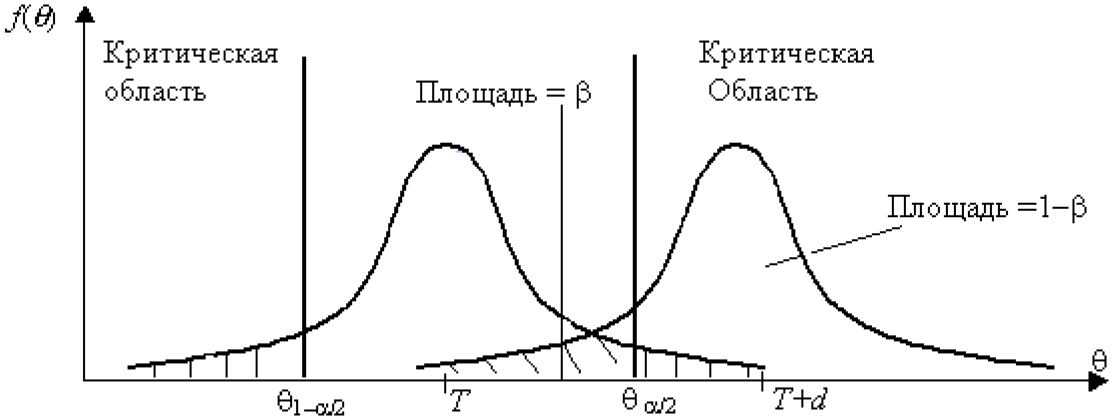


Сурет 5.1 – Гипотезаны қабылдау және қабылдамау аумақтары

Бағаланатын параметрдің ақихат мәні T-ға тең дейік. Егер $\theta = T$ теңдігі туралы H_0 гипотезасын қарастыратын болсақ, онда осы гипотезаны қабылдамау үшін θ мен T арасындағы айырмашылық қаншалықты үлкен болуы тиіс. Бұл сұраққа жауапты θ параметрдің сұрыптамалық таралуының негізінде θ мен T арасындағы белгілі бір берілген айырмашылыққа қол жеткізу ықтималдығын қарастырып, статистикалық мағынада беруге болады.

θ параметрінің аралықтың төменгі және жоғарғы шектерінен шығу ықтималдығының мәндерін бірдей деп болжау жөн. Ондай жорамал көп жағдайларда сенімді аралықты минимизациялауға, яғни тексеру критерийдің қуатын жоғарылатуға мүмкіндік береді. θ параметрі шекаралары $\theta_{1-\alpha/2}$ және $\theta_{\alpha/2}$ болатын аралықтан шығып кетуінің қосынды ықтималдығы α шаманы құрайды. Бұл шаманы аралықтан шығып кету ықтималдығы өте төмен болатындай етіп таңдау керек. Егер параметрдің бағасы берілген аралыққа түссе, онда бұл жағдайда тексерілетін гипотезаға күмән болу негізі жоқ, сондықтан $\theta = T$ теңдігі туралы гипотезаны қабылдау керек. Бырақ, егер сұрыптауды алғаннан кейін баға орнатылған шекаралардан шығатын болса, онда бұл жағдайда H_0 гипотезадан бас тартуға маңызды негіз бар. Сондықтан, бірінші текті қатені жіберу ықтималдығы α -ға тең (критерийдің мағыналық деңгейіне тең).

Егер, мысалы, параметрдің ақихат мәні шынында $T+d$ тең деп болжамдасақ, онда $\theta = T$ теңдігі туралы H_0 гипотезаға сәйкес θ параметр бағасы гипотезаны қабылдау аумағына түсетін ықтималдығы β -ны құрайды, сурет 5.2.



Сурет 5.2 – Аумақтардың таралуы

α мағыналық деңгейін азайтып, сұрыптаудың берілген көлемінде бірінші текті қатені жіберу ықтималдығын азайтуға болады. Бырақ бұл кезде β екінші текті қатенің ықтималдығы өседі (критерийдің қуаты азаяды). Ұқсама пікірлерді параметрдің ақихат мәні $T - d$ тең болған жағдай үшін де жасауға болады.

Екі ықтималдықты да азайтудың жалғыз тәсілі сұрыптау көлемін арттыру (параметр бағасының таралу тығыздығы бұл кезде "енсіздеу" болады). Күдікті аумақты таңдауда Нейман – Пирсон ережесіне сүйенеді: егер гипотеза дұрыс болса күдікті аумақты α ықтималдығы аз болатындай етіп, және кері жағдайда үлкен болатындай етіп таңдау керек. Бырақ α-ның нақтылы мәнін таңдау салыстырмалы түрде еркін. Пайдаланатын мәндер 0,001 ден 0,2 дейін аралықта жатады. Қолмен есептеулерді жеңілдету мақсатында α-ның типті мәндері және критерийді құрудың түрлі тәсілдері үшін $\theta_{1-\alpha/2}$ және $\theta_{\alpha/2}$ шекаралары бар аралықтар кестелері құрылған.

Тексерілетін гипотезаның мағынасына және сипаттама бағасының оның теориялық мәнінен айырмашылық өлшемдеріне тәуелді түрлі критерийлерді пайдаланады. Таралу заңдары туралы туралы гипотезаларды тексеру үшін еңжиі пайдаланылатын критерийлердің қатарына хи-квадрат Пирсон, Колмогоров, Мизес, Вилкоксон критерийлері, ал параметрлердің мәндері туралы Фишер, Стьюдент критерийлері жатады.

Таралу параметрлерін статистикалық бағалау әдісін пайдаланудың практикалық әдістемесін қарастырайық. Кездейсоқ шама (КШ) таралуының негізгі параметрлерінің толық орнықты (дәлелді) және ығыспаған бағаларын (математикалық күтім M_X және дисперсия σ_X^2) келесі формулалар бойынша алуға болады:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5.5}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \tag{5.6}$$

мұнда: n – сұрыптау көлемі.

Кездейсоқ X және Y шамалар арасындағы корреляция коэффициенттін келесі формула бойынша анықтайды:

$$R_{XY} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \tag{5.7}$$

(5.5) - (5.6) бағаларды көлемі шектелген сұрыптама бойынша анықтайтын болғандан олардың статистикалық шынайлығы және дәлділігі туралы сұрақ туындылайды.

Бізді қызықтыратын параметр бағасын θ деп белгілейік. Онда бағаның шынайлығы мен дәлділігін анықтау есебі параметрдің белгісіз ақихат мәні осы аралықта жатады деп 1-α (мұнда: α – жеткілікті түрде аз, 0.1, 0.05, 0.01,… тең шама) ықтималдықпен тұжырымдауға болатындай етіп, θ параметрді қамтитын (θ1, θ2) аралықты анықтауға келтіріледі. (θ1, θ2) аралықты сенімді аралық деп, ал 1-α ықтималдықты сенімді ықтималдық деп атайды.

X шама ықтималдық тығыздығы:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(X-M_X)^2}{2*\sigma_X^2}} \qquad (5.8)$$

болатын таралудың қалыпты заңына ие болатын жағдайды қарастырайық.

1- α ықтималдықпен M_X-ты қамтитын математикалық күтім үшін $\bar{X}-\varepsilon, \bar{X}+\varepsilon$ сенімді аралықты келесі шарттан табады:

$$P[\bar{X}-\varepsilon < M_X < \bar{X}+\varepsilon] = 1-\alpha$$

оны келесі түрде бейнелеуге болады:

$$P[|X - M_X| < \theta] = 1-\alpha \qquad (5.9)$$

v = n - 1 еркіндік дәрежелері бар Стьюденттің t-таралуына ие болатын келесі параметрді енгізейік:

$$t = \left[(\bar{X} - M_X)/\sigma_X\right] \cdot \sqrt{n} \qquad (5.10)$$

онда (5.9) теңдік келесі түрде қайта жазылады:

$$P = \left[|\bar{X} - M_X| < t(\alpha, \nu) \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha \qquad (5.11)$$

мұнда: t(a, v)-ны Стьюденттің таралу кестесі бойынша α ықтималдық пен v=n-1 еркіндік дәрежелерінде анықтайды. 1-α сенімді ықтималдыққа сәйкес болатын Mx үшін сенімді аралық келесідей:

$$\left[\bar{X} - \frac{t(\alpha,\nu)\cdot\sigma_X}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{t(\alpha,\nu)\cdot\sigma_X}{\sqrt{n}}\right] \qquad (5.12)$$

Дисперсия үшін сенімді аралықты анықтау үшін келесі теңдкті қанағаттандыратын σ_1^2 және σ_2^2 аралықтың шекараларын анықтау керек:

$$P[\sigma_1^2 < \sigma_X^2 < \sigma_2^2] = 1-\alpha \qquad (5.13)$$

Қалыпты таралған X үшін еркіндік дәрежелері v=n-1 болатын шаманың таралу заңы белгілі:

$$\chi^2 = (n-1)\cdot\sigma_X^2/\sigma^2 \qquad (5.14)$$

мұнда: σ_X^2 - сұрыптамалық дисперсия, σ^2 - сұрыптамалық дисперсияның ақихат мәні.

$P[\sigma_X^2 < \sigma_1^2] = P[\sigma_X^2 > \sigma_2^2] = \alpha/2$ шартында, (5.14) -ті (5.13)-ке қойғаннан кейін:

$P[\chi^2(1-\alpha/2,\nu) < (n-1)\cdot\sigma_X^2/\sigma^2 < \chi^2(\alpha/2,\nu)] = 1-\alpha$.

$\chi^2(1-\alpha/2,\nu) = (n-1)\cdot\sigma_X^2/\sigma_2^2$ шаманы Пирсонның таралу кестесі бойынша 1-α/2 ықтималдықта және v=n-1 еркіндік дәрежелер санында, ал $\chi^2(\alpha/2,\nu) = (n-1)\cdot\sigma_X^2/\sigma_1^2$ шаманы α/2 ықтималдықта және v=n-1 еркіндік дәрежелер санында анықтайды.

Сондықтан, 1-α сенімді ықтималдыққа сәйкес σ_X^2 дисперсия үшін сенімді аралық:

$$\left[\frac{(n-1)\cdot\sigma_X^2}{\chi^2(\alpha/2,\nu)}; \frac{(n-1)\cdot\sigma_X^2}{\chi^2(1-\alpha/2,\nu)}\right] \qquad (5.14)$$

Статистикалық гипотезаларды тексеру алгоритмі. Статистикалық гипотеза түсінігі КШ таралу түрі немесе оның таралуының кейбір параметрі туралы жорамалдауды білдіреді. Гипотезаны тексерудің мағынасы берілген сұрыптау бойынша есептелген белгілі бір статистикалық көрсеткішті (мағыналық критерийін) тексерілетін гипотеза дұрыс болатын шартта теориялық табылған мағыналық критериймен салыстыруда,

1) Mx = C туралы гипотезаны тексеруде критерий ретінде келесі шаманы пайдаланады:

$$t = (\overline{X} - C) \cdot \sqrt{n} / \sigma_X \tag{5.15}$$

Бұл шама гипотеза дұрыс деген шартта v=n-1 еркіндік дәрежелері бар Стьюденттің t-таралуына ие. Егер (5.15) қатынас бойынша есептелген t мәні абсолют шамасы бойынша α мағыналық деңгейінде және v еркіндік дәрежелер санында t-таралу кестесі бойынша табылған күдікті $t_{кр}$=t(α, v) мәннен аспайтын болса, онда Mx=C туралы гипотеза қабылданады, кері жағдайда қабылданбайды.

2) Кездейсоқ X және Y шамалардың көлемдері n_1 және n_2 екі сұрыптамалары бойынша есептелген екі математикалық күтімдердің теңдігі Mx = My туралы гипотезаны тексеруді келесі критерий бойынша жүргізеді:

$$t = (X - Y) / \sigma_{X-Y} \tag{5.16}$$

$$\sigma_{X-Y} = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2) \cdot [(n_1 - 1) \cdot \sigma_X^2 + (n_2 - 1) \cdot \sigma_Y^2]}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}} \tag{5.17}$$

t критерий еркіндік дәрежелер саны $v=n_1+n_2-2$ болатын Стьюденттің t-таралуына ие. Гипотезаны тексеру алдыңғы жағдайдағыдай орындайды, яғни, |t|<=tкр болғанда гипотеза қабылданады, ал $|t|>t_{кр}$ болғанда қабылданбайды.

3) σ_X^2 және σ_Y^2 бағалары көлемдері n_1 және n_2 екі сұрыптамалары бойынша анықталған екі кездейсоқ X және Y шамалардың дисперсияларының теңдігі туралы гипотезаны тексеруді алымы үшін еркіндік дәрежелер саны $v_1=n_1-1$ және бөлімі үшін еркіндік дәрежелер саны $v_2=n_2-1$ Фишер таралуына ие болатын келесі критерийді пайдалану арқылы жүргізеді:

$$F = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2, \tag{5.18}$$

(5.18) критерий бойынша алынған мәнді күдікті Fкр=F(α, v_1, v_2) мәнбен салыстырады. Егер F<Fкр болса, онда нөльдік гипотезадан бас тартуға негіз жоқ, кері жағдайда, бас жиынтықта $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ деп қабылдаймыз.

4) Екі КШ арасында корреляцияның жоқтығы туралы гипотезаны тексеруде келесі қатынасты пайдаланады:

$$t = R_{XY} / \sigma_R, \tag{5.19}$$

мұнда: R_{XY} - (5.7) бойынша табылған корреляция коэффициентінің бағасы,

$$\sigma_R^2 = [(1 - R_{XY}^2)/(n-2)]$$

t шама еркіндік дәрежелер саны v=n-2 болатын Стьюденттің t-таралуына ие. Егер (5.19) қатынас бойынша есептелген t мәні абсолют шамасы бойынша α мағыналық деңгейінде және v еркіндік дәрежелер санында t-таралу кестесі бойынша табылған күдікті $t_{кр}$=t(α, v) мәннен аспайтын болса, онда бас жиынтықта корреляцияның жоқ болуы туралы гипотезадан бас тартуға негіз жоқ, кері жағдайда X пен Y шамалар арасында корреляция бар деп қабылдаймыз.

Бақылау сұрақтары

1 дисперсиялық талдау теориясының элементтері;

2 кездейсоқ шамалардың таралу параметрлерін статистикалық бағалау;

3 сәйкестендіру есептерін практикалық шешуде қолданылатын статистикалық гипотезаларды тексеру;

4 статистикалық гипотезаларды тексеру алгоритмі.

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

6 лекция Регрессия теңдеуі түріндегі статикалық және динамикалық модельдер (4-бөлім)

Мақсаты: лекцияда регрессия теңдеуі түріндегі объектілердің статикалық және динамикалық модельдерін анықтауда пайдаланылатын экспериментті жоспарлау әдістері қарастыру.

Тезистер

Классикалық регрессиялық талдаудың негізгі кемшіліктері: коэффициенттер арасындағы корреляция; қатені бағалаудағы қиындықтар; көп тәжірибелерді өткізу қажеттілігі; b_i коэффициенттерін қолмен есептеп анықтаудың қиындықтары.

Тәжірибені статистикалық жоспарлау (ЭЖ) әдістерінің негізінде факторлық кеңістікте нүктелердің орналасуының реттелген жоспарын пайдалану және жаңа өлшемсіз координаттар жүйесін пайдалану жатады. ЭЖ әдістерін пайдалану регрессиялық талдаудың дерлік барлық кемшіліктерін жоюға мүмкіндік береді.

Экспериментті жоспарлау әдістері статикалық және динамикалық модельдерді құруға мүмкіндік береді. Олардың екі түрін де аналитикалық және экспериментальды-статистикалық әдістермен анықтауға болады. Имитациялық модельдеудің дамуының алғашқы кезеңінде оптимальды эксперимент теориясы негізінде статикалық объектілердің модельдерін құруда пайдаланылған. Динамикалық модельдерді құруға қатысты құру әдістемесі идентификаттау объекттің қалыпты жұмыс жасау режимінде жүргізілетін пассивті экспериментке негізделген. Бырақ, арнайы тестілеуші сигналдарды қолданумен идентификаттаудың белсенді әдістері де жайлап пайдалана бастады. Ондай сигналдар ретінде псевдокездейсоқ сигналдарды пайдаланған.

Негізгі ұғымдар: факторлар (кірістер, әсерлер – олар корреляцияланбауы тиіс, деңгейлер (факторлар қабылдайтын дискретті мәндер), ЭЖ матрицасы (жоспардың өзі), математикалық өңдеу әдістері.

Экспериментті жоспарлаудың (ЭЖ) негізгі принциптері.

Пассивті эксперимент деп қосымша әсерлерді тигізбей, кіріс және шығыс деректерді тіркеу жұмыс режимде орындалатын экспериментті атайды. Ол модель құрылымы жақсы белгілі және оның адекваттылығы күмән тудырмайтын жағдайларда (параметрлік идентификаттау есептері шешілетін жағдайда) пайдаланылады.

Белсенді эксперимент зерттеулердің нәтижелері бойынша модель құрылымын қосымша бағалауға мүмкіндік беретіндей бақылауларды жүргізудің ерекше программасын (жоспарды) көздейді.

Белсенді эксперименттің **факторлары** деп олар бойынша басқаруды жүргізуге болатын және олар модельді құруға қатысатын (x_i) айнымалыларды атайды.

Факторлардың әрқайсысы **деңгейлер** деп аталатын түрлі мәндерді қабылдай алады. Тәжірибеде, деңгейлер саны – ол шексіз мөлшер немесе деңгейлердің үздіксіз қатары $x_i \in \lfloor x_{0i}, x_{ni} \rfloor$. Белсенді эксперимент теориясында бұл қатар дискреттеледі де, жеке деңгейлер таңдап алынады: $\lfloor x_{i0}, x_{i1}, x_{i2} \rfloor$.

Деңгейлердің бекітілген жиынтығы факторлардың күйі деп аталады.

Жоспар – барлық факторларды барлық деңгейлерде пайдалануға мүмкіндік беретін экспериментті жүргізу программасы. Егер жоспар факторлар мен деңгейлердің барлық мүмкін болатын терулерін қамтитын болса, ондай жоспар толық жоспар деп аталады.

Егер р – деңгейлердің жалпы саны; к – факторлардың саны болса, онда эксперименттің толық жоспары эксперименттердің келесі мөлшерін қамтиды: $N = p^k$

ЭЖ әдістерінде кодталған (өлшемсіз) параметрлер пайдаланылады. Олар координаттардың басын z_j^0 нүктесіне - жоспар орталығына (негізгі деңгей) тасымалдағанға сәйкес.

$$z_j^0 = \frac{z_j^{\max} + z_j^{\min}}{2}, \quad j = 1,2..k . \qquad (6.1)$$

z_j осі бойынша фактор мәнін өзгерту аралығы келесі формула бойынша анықталады:

$$\Delta z_j = \frac{z_j^{\max} - z_j^{\min}}{2} \qquad (6.2)$$

Физикалық (табиғи) z_j айнымалылардан өлшемсіз x_j координаталарына өту үшін:

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j} \qquad (6.3),$$

өрнекті пайдаланады, ал қайтадан кері өту үшін

$$z_j = z_j^0 + x_j \cdot \Delta z_j \qquad (6.4).$$

Мысалы, $z_1^{\max} = 200°\tilde{N}$ $z_1^{\min} = 100°\tilde{N}$ болсын,

онда $\Delta z_1 = 50°C$, $z_1^0 = 150°C$ $x_1 = \frac{z_1 - z_1^0}{\Delta z_1}$,

$z_1 = z_1^{\min} = 100°\tilde{N}$ болғанда $x_1 = \frac{100-150}{50} = -1$.

Толық факторлық экспериментте (ТФЭ) өлшемсіз айнымалылар үшін жоғары деңгей +1, ал төменгі –1 тең, жоспар орталығының координаттары нольге тең. Кейбір жоспарларда (төменірек қара) факторлардың өлшемсіз $x_j = \pm\alpha$ мәндері пайдаланылады, натурал координаталардағы оларға сәйкес мәндерді $z_j = z_j^0 + \alpha \cdot \Delta z_j$ өрнегі бойынша табады.

Келтірілген мысалда α =1.4 болғанда, z1 = 150+1.4·50 = 220°С

Координаттардың өлшемсіз жүйесін енгізу нәтижелерді қолмен өңдеуді жеңілдету үшін ғана енгізілгенін ескеру керек. Егер шешімді іздеу үшін (4.15) матрицалық теңдеуді пайдалансақ, онда бірден табиғи (физикалық) масштабта табылған коэффициенттермен шешімді аламыз.

Толық факторлық экспериментте (ТФЭ) факторлардың мәндерінің мүмкін болатын барлық терулерінде өзгертудің барлық деңгейлерінде тәжірибелерді жүргізу қамтамасыз етіледі, факторлардың тек +1 және –1 тең мәндері ғана қолданылады. ТФЭ тәжірибелердің қажетті саны:

$$N = (N_{\text{ДЕҢГЕЙЛЕР}})^K, \qquad (6.6)$$

$N_{\text{ДЕҢГЕЙЛЕР}} = 2$ жиі пайдаланады, онда тәжірибелердің қажетті саны 6.1 кестеде көрсетілген:

Кесте 6.1

тәжірибелердің қажетті саны

Факторлар саны – *k*	3	4	5	6	7
Тәжірибелер саны – N	8	16	32	64	128
Сызықтық модель коэффициенттерінің саны - L	4	5	6	7	8
Еркіндік дәрежелер саны - f	4	11	26	57	120

x_1 x_2 x_3 үш фактор үшін ТФЭ матрицасы өлшемсіз түрде (у – шығыс, тәжірибені өткізу нәтижесі) 6.2 кестеде көрсетілген:

Кесте 6.2

Үш фактор үшін ТФЭ матрицасы

Тәжір. №	x_0	x_1	x_2	x_3	y
1	+1	–1	–1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	y_8

Эксперименттің жоспарын былай түсінеді. Мысалы,

бірінші тәжірибе үшін: $z_1 = z_1^{\min}$ $z_2 = z_2^{\min}$ $z_3 = z_3^{\min}$, тәжірибенің нәтижесі y_1,

екінші тәжірибе үшін: $z_1 = z_1^{\max}$ $z_2 = z_2^{\min}$ $z_3 = z_3^{\min}$, тәжірибенің нәтижесі y_2 және с.с.

x_0 бағаны жалған (фиктивті) деп аталатын $x_0 = +1$ айнымалыға сәйкес, ол төменде келтірілген өрнектерін шығаруды ыңғайлату үшін ғана қажет. Регрессия теңдеуінің b_i коэффициенттерін белгілі (5.14) өрнегінің $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$ негізінде есептейді. Бырақ кестеде келтірілген матрица қолмен есептеу жұмысын жеңілдететін бір қатар қасиеттерге ие.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ui} \cdot x_{ji} = 0; u \neq j; \quad u, j = 0,1,..., k \text{ - ортогональдық қасиеті;} \tag{6.7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0; j = 1,..., k; j \neq 0 \tag{6.8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N; j = 0,1,..., k; \tag{6.9}$$

Жоспарлау матрицасының ортогоналдылығы $(X^T X)$ матрицаның диагональдық болуына әкеледі, соның нәтижесінде $(X^T X)^{-1}$ қолмен оңай табылады ([1], 162 бет].), ал регрессия теңдеуінің b_i коэффициентері келесі формула бойынша табылады:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot y_i \tag{6.10}$$

6.2. кестеде келтірілген ЭЖ матрицасы регрессияның сызықтық теңдеу коэффициенттерін анықтауға мүмкіндік береді:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 .$$

Негізінде, бар болатын еркіндік дәрежелері

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 \tag{6.11}$$

түрдегі өзара әрекеттесу әсерлерін ескеріп, регрессия теңдеуінің коэффициенттерін анықтауға мүмкіндік береді.

Ол үшін ЭЖ матрицасын (6.2 кесте) $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_2 x_3$ және $x_1 x_2 x_3$ үшін ақпаратты қамтитын жалған бағаналармен толықтыру керек (6.3 кестесі). Мысалы: $x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2 = (–1 \cdot –1) = +1$. Бұл кезде қосымша тәжірибелерді жүргізу керек емес.

Кесте 6.3
ТФЭ жоспары

Тәжір. №	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Коэффициенттердің мағыналығы мен регрессия теңдеуінің адекваттылығын жоғарыда айтылғандай анықтайды. Регрессия теңдеуінің соңғы түрі анықталғаннан кейін (6.5) теңдеуді пайдаланып, кодталған айнымалылардаң физикалық айнымалыларға өтуге болады.

Бөлшекті факторлық эксперимент

Басқа аталуы – бөлшекті репликалар әдісі. ТФЭ-те факторлар саны өскен сайын тәжірибелер саны мен еркіндік дәрежелер саны күрт өседі (6.1. кестені көр). Демек, ТФЭ-те тәжірибелер саны әдетте анықталатын коэффициенттер санынан асады, демек, ТФТ тәжірибелердің артық болуына ие. Бөлшекті факторлық экспериментте (БФЭ) ТФЭ-ге қарағанда зерттелетін факторлар деңгейлерінің мүмкін болатын терулердің барлығын пайдаланбайды. Олардың кейбір терулері тастап кетіледі. Деңгейлерді сұрыптаудың қысқаруы әрдайым ақпараттың бір бөлігінің жоғалуына әкеледі. БФЭ жоспары былай құрылады, сызықтық модель алуды қамтамасыз ету үшін жоспарлау матрицасы ортогональдық қасиетін сақтап қалуы тиіс. Қарастырылатын әдістің мағынасы – математикалық сипаттауды алу үшін ТФЭ-ің бір бөлігі пайдаланылады. Мысалы, 4 фактор үшін негіз ретінде үш факторға арналған жоспар алынады, ал төртінші фактор үшін өзара әрекеттесу әсерлерін қамтитын бағаналардың біріне сәйкес жоспар пайдаланылады (6.3 кестесіндегі 6-9 бағаналар). Егер факторлардың өзара әрекеттесулерінің мағыналығы туралы мәлімет болмаса, онда $x_4 = x_1x_2x_3$ немесе $x_4 = -x_1x_2x_3$ үшеулік өзара әрекеттесулерге сәйкес 9 бағанды таңдаған дұрыстау. Мұндай қатынастар генерациялаушы қатынастар деп аталады, себебі олар бөлшекті репликаны генерациялайды (құрады). Генерирациялаушы қатынастың екі бөлімін де x_4 көбейтіп $I = x_1x_2x_3x_4$ аламыз. Ол анықтаушы контраст деп аталады. Экспериментті жоспар бойынша жүргізеді (кесте 6.4):

Кесте 6.4
БФЭ жоспары

Тәжірибе №	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	+1	–1	–1	–1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	y_5

6	+1	+1	–1	+1	–1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Бұл жоспар бойынша, мысалы бірінші тәжірибе үшін:
$z_1 = z_1^{\min}$ $z_2 = z_2^{\min}$ $z_3 = z_3^{\min}$ $z_4 = z_4^{\min}$, тәжірибенің нәтижесі y_1.

Жоспар ТФЭ-нің 2^4 тәжірибелерінің жартысын қамтиды да, жартылай реплика (полуреплика) деп аталады. Сонымен қатар, ¼ реплика, ⅛ реплика және т.с.с. пайдаланады. БФЭ 2^{k}-p түрінде белгіленеді, мұндағы k – факторлар саны, p – бөлшекті репликалар саны, біздің мысалда ол 2^4-1. Регрессия коэффициенттерін есептеу, олардың мағыналығын тексеру ТФЭ-ке арналған формулалар бойынша орындалады.

Тәжірибені ортогональды жоспарлау

Басқаша аталуы - Бокс-Уилсон жоспарлары. Ортогональдық орталық композициялық жоспарларды (ОКЖ) құру үшін жұлдыздық иық деп аталатын α пайдаланылады (жұлдыздық нүктелер иығы). Бұл қосымша жүргізілетін тәжірибелер, мысалы, (k<5 *үшін*) ТФЭ жоспарына немесе (k≥5) бөлшекті жоспарына. 6.2 кестесіндегі жоспарға жасалған осындай қосымша 6.5 кестесінде келтірілген

Кесте 6.5

6.2 кестесіндегі жоспарға жасалған қосымша

Тәжірибе №	x_0	x_1	x_2	x_3	y	
9	+1	–α	0	0	y_9	Жұлдыздық нүктелер (2k нүкте)
10	+1	+α	0	0	y_{10}	
11	+1	0	–α	0	y_{11}	
12	+1	0	+α	0	y_{12}	
13	+1	0	0	–α	y_{13}	
14	+1	0	0	+α	y_{14}	
15	+1	0	0	0	y_{15}	Жоспар орталығы N_0 нүкте

Тәжірибелердің жалпы саны келесу формула бойынша анықталады:

$$N = 2^k + 2 \cdot k + N_0 \quad \text{(k<5 болғанда)} \qquad (6.12)$$

Егер ТФЭ-те адекватты математикалық модельді алу мүмкін болмаса және экстремумге жақын аймақтарды зерттегенде әдетте жұлдыздық нүктелер мен орталықтағы нүктелерді қосады. Мұндай аймақтарды сипаттау барысында екінші реттік полиномдарды кеңінен пайдаланады. ОКЖ ортогональды емес, бырақ, α таңдау арқылы ортогональдылыққа (ООКЖ) оңай келтіріледі. α мәндері 6.6 кестеде келтірілген ([1]., 181, 183 бет.)

Кесте 6.6

N_0	k=2	k=3	k=4
1	α=1,000	α=1,476	α=2,000
2	α=1,160	α=1,650	α=2,164
3	α=1,317	α=1,831	α=2,390

Коэффициенттерді есептеу үшән пайдаланылатын ООКЖ үшін жоспарлау матрицасы x_1^*, x_2^*…бағандармен толықтырылады. Мысалы, k=2 және N_0=1 үшін 6.7 кестеде келтірілген матрицаны аламыз. Кестеде $x_j^* = x_j^2 - \bar{x}_j^2 = x_j^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2$ ортогональды матрицаны алу үшін енгізілген.

Кесте 6.7

Тәж №	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^*	x_2^*	y
1	2	3	4	6	8	9	10
1	+1	+1	+1	+1	+0,333	+0,333	y_1
2	+1	+1	–1	–1	+0,333	+0,333	y_2
3	+1	–1	–1	+1	+0,333	+0,333	y_3
4	+1	–1	+1	–1	+0,333	+0,333	y_4
5	+1	+1	0	0	+0,333	–0,667	y_5
6	+1	–1	0	0	+0,333	–0,667	y_6
7	+1	0	+1	0	–0,667	+0,333	y_7
8	+1	0	–1	0	–0,667	+0,333	y_8
9	+1	0	0	0	–0,667	–0,667	y_9

Жоспарлау матрицаның ортогональды болуының арқасында барлық коэффициенттер бір-біріне тәуелсіз келесі формула бойынша есептеледі:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2}, \qquad (6.13),$$

ал коэффициенттердің дисперсиялары:

$$s_{b_j}^2 = \frac{s^2_{óä\_îíä}}{\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2} \qquad (6.14)$$

6.7 кестедегі матрица бойынша есептеу нәтижесінде ООКЖ регрессия теңдеуінің түрі:

$$\hat{Y} = b_0^* + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + \ldots + b_{11}x_1^* + \ldots + b_{kk}x_k^*$$

Кәдімгі жазуға өту үшін b_0 келесі өрнек бойынша анықтайды:

$$b_0 = b_0^* - b_{11}\bar{x}_1^2 - \ldots - b_{kk}\bar{x}_k^2$$

және: $s_{b_0}^2 = s_{b_0^*}^2 + (\bar{x}_1^2)^2 s_{b_{11}}^2 + \ldots + (\bar{x}_k^2)^2 s_{b_{kk}}^2$ дисперсиямен бағалайды.

Ұдайы өндіру дисперсиясын біліп, коэффициенттер мағыналығын және регрессия теңдеуінің адекваттылығын тексереді:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + \ldots + b_{11}x_1^2 + \ldots + b_{kk}x_k^2$$

Адекваттылықты дисперсиялардың қатынасын құрып, Фишер критериі бойынша тексереді: $F_{ÂÑÂÏ} = \frac{S^2_{ÀÄ}}{S^2_{ÕÂÎÍÄ}}$, Адекваттылықтылық шарты: $F_{ÂÑÂÏ} < F_{1-p}(f_1, f_2)$, мұнда: $f_1 = f_{ÀÄ} = N - L$ $f_2 = f_{ÓÂÎÍÄ}$.

Коэффициенттердің мағыналығын келесі формула бойынша анықтайды:

$t_j = \frac{|b_j|}{S_{b_i}}$, егер $t_j > t_{ÊÂÑ}(f_2)$ болса, онда b_j мағыналы болып саналады.

ООКЖ-да b_j әртүрлі дәлділікпен анықталатын болғандықтан, онда (k<5 болғанда):

$$s_{b_0} = \frac{s_{\text{ÓÄÎÍÄ}}}{\sqrt{N}},$$

$$s_{b_j} = \frac{s_{\text{ÓÄÎÍÄ}}}{\sqrt{2^k + 2\alpha^2}}, \quad \mathrm{j} = 1,2,...,\ \mathrm{k}$$

$$s_{b_{uj}} = \frac{s_{\text{ÓÄÎÍÄ}}}{\sqrt{2^k}} \quad \mathrm{u, j} = 1,2,..,\ \mathrm{k},\ \ \mathrm{u} \neq \mathrm{j}$$

$$s_{b_{jj}} = \frac{s_{\text{ÓÄÎÍÄ}}}{\sqrt{2^k(1-\bar{x}_1^2)^2 + 2(\alpha^2 - \bar{x}_1^2)^2 + (N_0 + 2k - 2)(\bar{x}_1^2)^2}}, \quad \mathrm{j} = 1,2,...,\ \mathrm{k}$$

Экспериментті ротатабельді жоспарлау (ЭРЖ)

Екінші аталуы - Бокс-Хантер жоспарлары. Ортогональды жоспарлар ротатабельділік қасиетіне ие емес. ЭРЖоспарлау ОКЖоспарлаумен салыстырғанда дәлірек математикалық модельді алуға мүмкіндік береді. Бұл жоспар орталығындағы тәжірибелер санын көбейтумен және жұлдыздық α йығын арнайы таңдау арқылы іске асырылады. ЭРЖ сипаттамалары 6.8 кестеде келтірілген.

Кесте 6.8.

Тәжірибелер санын есептеу

Саны					**α** мәні
факторлар - **k**	тәжірибелер				
	ТФЭ	жұлдыздық нүктелерде	жоспар ортасында – N_0	барлығы - N	
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,680
4	16	8	7	31	2,000
5	32	10	10	52	2,378

Регрессия теңдеуінің кэффициенттері өзара корреляциялған, сондықтан, $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$ матрицалық (5.14) өрнекті пайдалана отырып оларды табуға болады, яғни, $(X^T X)$ матрицаны айналдыру амалын орындау керек. Бырақ осы матрицаның ерекше түріне байланысты ЭРЖоспарлауда регрессия теңдеуінің коэффициенттерін және олардың дисперсияларын есептеу үшін аналитикалық өрнектерді алуға болады. Олардың түрі:

$$\left.\begin{aligned} & b_0 = a_1 \sum_{i=1}^{N} y_i - a_2 \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i;\ b_j = a_3 \sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i;\ \ \mathrm{j} = 1,2,...,\ \mathrm{k} \\ & b_{uj} = a_4 \sum_{i=1}^{N} x_{ui} x_{ji} y_i;\ \ \mathrm{u} \neq \mathrm{j};\ \ \mathrm{j, u} = 1,2,...,\ \mathrm{k} \\ & b_{jj} = a_5 \sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i + a_6 \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i + a_7 \sum_{i=1}^{N} y_i \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

$$s_{b_0}^2 = a_1 s_y^2 \quad s_{b_j}^2 = a_3 s_y^2 \quad s_{b_{uj}}^2 = a_4 s_y^2 \quad s_{b_{jj}}^2 = (a_5 + a_6) s_y^2 ,$$

(6.16)

мұндағы a_i мәндері 6.9 кестеде келтірілген.

Кесте 6.9

k	N	N_0	α	a_1	a_2	A_3	a_4	a_5	a_6	a_7
2	13	5	1,412	0,2000	0,1000	0,1250	0,2500	0,1251	0,0187	0,1000
3	20	6	1,682	0,1663	0,0568	0,0732	0,1250	0,0625	0,0069	0,0568
4	31	7	2,000	0,1428	0,0357	0,0417	0,0625	0,0312	0,0037	0,0357
5	32	6	2,000	0,1591	0,0341	0,0417	0,0625	0,0312	0,0028	0,0341

Ұдайы өндіру дисперсиясын жоспар орталығындағы тәжірибелер бойынша анықтайды:

$$S_{\text{ÓÀÎÍÀ}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{N_0} (y_u^0 - \bar{y}^0)^2}{N_0 - 1} \qquad \bar{y}^0 = \frac{\sum_{u=1}^{N_0} y_u^0}{N_0} \qquad f_{\text{ÓÀÎÍÀ}} = (N_0 - 1) .$$

Қалдық дисперсия келесі формула бойынша анықталады:

$$S_{\text{ÊÀËÄ}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{N - L} \quad f_{\text{ÊÀËÄ}} = (N - L) .$$

Регрессия теңдеуінің адекваттылығын Фишер критериі бойынша анықтайды:

$$F_{\text{ÀÑÀÏ}} = \frac{S_{\text{ÀÄ}}^2}{S_{\text{ÓÀÎÍÀ}}^2} ,$$

мұндағы адекваттылықтың дисперсиясы:

$$S_{\text{ÀÄ}}^2 = \frac{S_{\text{ÊÀËÄ}}^2 f_{\text{ÊÀËÄ}} - S_{\text{ÓÀÎÍÀ}}^2 \; f_{\text{ÓÀÎÍÀ}}}{f_{\text{ÀÄ}}} \qquad f_{\text{ÀÄ}} = f_{\text{ÊÀËÄ}} - f_{\text{ÓÀÎÍÀ}}$$

Егер $F_{\text{ÀÑÀÏ}} < F_{1-p}(f_1, f_2)$ болса, мұнда: $f_1 = f_{\text{ÀÄ}} \quad f_2 = f_{\text{ÓÀÎÍÀ}}$. теңдеу адекватты болады

Коэффициенттердің мағыналығын Стьюдент критериі бойынша анықтайды, бырақ, егер квадраттық критерийлердің біреуі мағынасыз болып қалса, онда оны алып тастағаннан кейін регрессия теңдеуінің коэффициенттерін қайта есептеп шығу керек.

Бақылау сұрақтары

1 экспериментті жоспарлаудың негізгі принциптері;

2 бөлшек факторлық эксперимент;

3 экспериментті ортогональды жоспарлау.

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.

Қосымша әдебиет

3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

7 лекция Идентификациялаудың жалпы мәселелері. Негізгі анықтамалар.

Мақстаы: лекцияда уақыттық қатарлардың негізгі сипаттамаларын, идентификаттаудың жалпы мәселелерін, негізгі анықтамаларды, басқару объектілерін корреляциялық талдау әдісімен идентификациялауды қарастыру.

Тезистер

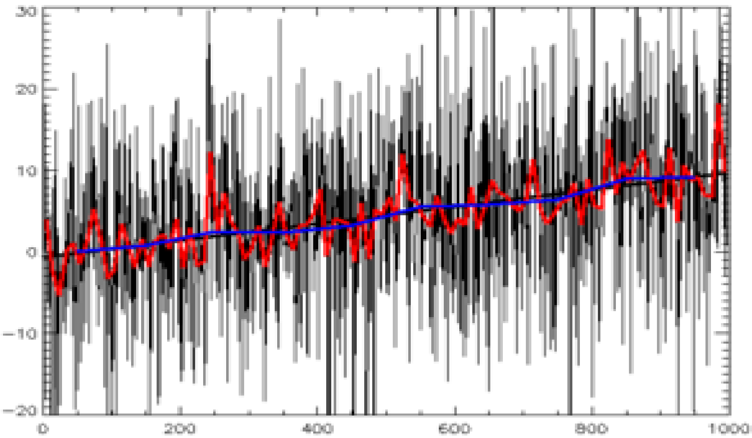
Уақыттық қатарлардың негізгі сипаттамалары

Толығырақ ([1-4] қара). Негізгі түсініктер: кездейсоқ шама (КШ) және кездейсоқ урдіс (КҮ), уақыттық қатар (ҰҚ), жүзеге асыру, ансамбль, стационарлы КҮ, эргодикалық КҮ, баға. Стационарлы КҮ математикалық күтімі мен дисперсиясы тұрақты.

Уақыттық қатар (немесе динамика қатары) — ол кейбір еркін айнымалы шаманың уақыт бойынша реттелген мәндерінің тізбектілігі. Сонымен, уақыттық қатардың деректердің жай сұрыптамасынан айырмашылығы маңызды. Берілген айнымалының әр жеке мәні уақыттық қатардың есепке алынуы (санағы) (элементтер деңгейі) деп аталады.

Сонымен қатар, сұрыптау – белгілі бір процедура арқылы зерттеуге қатысу үшін бас жиынтықтан таңдап алынған жағдайлардың жиынтығы (сынақталатын объекттер, оқиғалар, үлгілер).

Уақыттық қатарларды **талдау** – уақыттық қатарлардың құрылымын айқындауға және оларды болжауға арналған математика-статистикалық талдау әдістерінің жиынтығы. Бұлардың қатарына, жеке жағдайда, регрессиялық талдау әдістері жатады. Уақыттық қатардың құрылымын айқындау талданатын уақыттық қатардың көзі болып табылатын құбылыстың математикалық моделін құру үшін қажет. Уақыттық қатардың болашақ мәндерін болжау шешімдерді тиімді қабылдау үшін пайдаланылады.



Сурет 7.1 – Уақыттық қатар мысалы

Уақыттық қатарлар екі элементтерден тұрады:

- Сол аралықта немесе сол мезгілдегі күй бойынша сандық мәндер келтірілетін уақыттың периоды;
- Қатардың деңгейлері деп аталатын кейбір көрсеткіштің сандық мәндері.

Уақыттық қатарлар келесі белгілері бойынша жіктеледі:

- деңгейлерді бейнелеу түрлері бойынша:
  - абсолютті көрсеткіштер қатарлары;
  - салыстырмалы көрсеткіштер қатарлары;
  - орташа шамалар қатарлары.
- Уақыттың әр моментінде олар үшін деңгейлері анықталатын көрсеткіштер саны бойынша: біреолшемді және көпөлшемді уақыттық қатарлар;

- Уақыттық параметрдің сипаты бойынша: моменттік және интервалдық уақыттық қатарлар. Моменттік уақыттық қатарларда деңгейлер уақыттың белгілі бір моменттеріндегі күйі бойынша көрсеткіштің мәндерін сипаттайды. Интервалдық қатарларда деңгейлер уақыттың белгілі бір периодтарында көрсеткіштің мәндерін сипаттайды. Абсолютті шамалардың интервалдық уақыттық қатарларының маңызды ерекшелігі барлық деңгейлерді қосындылау мүмкінділігінде. Абсолютті шамалардың моменттік қатарларының жеке деңгейлері қайталап есептеу элементтерін қамтиды. Бұл моменттік қатарлардың деңгейлерін қосындылауды мағынасыз етеді.
- Даталар мен уақыт интервалдары арасындағы ара-қашықтық бойынша бір-бірінен ара-қашықтықтары бірдей – тіркеу немесе периодтардың аяқталу даталары бірінен кейін бірі бірдей интервалдармен ілесетін болғанда; және толық емес (бір-бірінен ара-қашықтықтары бірдей емес) – бірдей интервалдар принципі сақталмаған жағдайда;
- өткізіп алынған мәндердің бар болуы бойынша: толық және толық емес уақыттық қатарлар;
- уақыттық қатарлар детерминді және кездейсоқ болады: біріншілерді кейбір кездейсоқ емес функция мәндерінің негізінде алады (айдағы күндер саны туралы тізбектелген деректер қатары); екіншілері кейбір кездейсоқ шаманың жүзеге асырылу нәтижесі.
- негізгі тенденцияның бар болуына тәуелді **стационарлы** қатарларды – оларда орташа мән және дисперсия тұрақты және **бейстационарлы** - дамудың негізгі тенденциясын қамтитын қатарларды ерекшелейді.

Уақыттық қатарларға мысалдар (сурет 7.1)**.** Уақыттық қатарлар, әдетте, кейбір көрсеткішті өлшеу нәтижесінде пайда болады. Олар техникалық жүйелердің көрсеткіштерімен (сипаттамалары) қатар табиғи, әлеуметтік, экономикалық және с.с. жүйелердің көрсеткіштері (мысалы ауа-райы туралы деректер) болуы мүмкін. Уақыттық қатардың типтік мысалы ретінде биржалық бағымы болуы мүмкін, оны талдау арқылы дамудың негізгі бағытын (тенденция немесе трендті) анықтауға тырысады.

Уақыттық қатарларды талдауды статистикалық талдаудың басқа түрлерінен ерекшелейтін негізгі белгі бақылаулар жүргізілетін реттің маңыздығы болып табылады. Егер көптеген есептерде бақылаулар статистикалық тәуелсіз болса, онда уақыттық қатарларда олар, әдетте, тәуелді және осы тәуелділіктің сипаты тізбектіліктегі бақылаулардың орнымен анықталуы мүмкін. Қатардың табиғаты және қатарды туындылаушы үрдістің құрылымы тізбектіліктің құрылу тәртібін (ретін) алдын-ала анықтай алады.

Кейде **бейстационарлы** кездейсоқ үрдісті (КҮ) g_i төменжиіліктік аддитивті құрамдасын (тренд, дрейф) алып тастап, мысалы, төменде келтірілген Тьюки спектральды терезесін пайдаланатын жоғары жиіліктер фильтрін пайдаланып,:

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=-m}^{m} h_i g_{i-j} \ ,$$

мұнда $h_0 = 1 - \frac{1}{m+1}$ $\qquad h_j = h_{-j} = \frac{1}{2(m+1)}\left[1+\cos(\frac{j\pi}{m+1})\right]$ (7.1)

фильтрдің қиып тастау жиілігі fc оның m ретімен және уақыттық қатардың $f_{ÈÇ}$ өзгеру жиілігімен байланысты: $f_c = f_{ÈÇ}/2m$.

Уақыттық қатардың (УҚ) орташа мәнін (математикалық күтім, МК) келесідей анықтауға болады:

$$m_x = M[x(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt,$$

МК бағасы $\tilde{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ (7.2).

(N өлшеулер бойынша орташа, сұрыптамалық орташа, УҚ-ың тұрақты ығысуын сипаттайды, кездейсоқ емес шама, стационарлы КҮ үшін $\tilde{m}_x = const$).

ТҮ АБЖ жағдайларында әдетте МК-ді нақтылы уақыт (online) режимінде анықтау есебі тұрады. Ол үшін рекурренттік формуланы пайдалануға болады:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} + \frac{1}{i}(x_i - \bar{x}_{i-1}), \qquad (7.3)$$

мұнда: $\bar{x}_i$ МК-ің ағымдағы мәні, $\bar{x}_{i-1}$- алдыңғы қадамда анықталған МК; x_i x-тің ағымдағы мәні (датчиктен келетін сигнал).

Формуланың басқа түрі: $\bar{x}_i = (1-\alpha)\bar{x}_{i-1} + \alpha x_i$, мұнда 0<α<2.

УҚ-ның **дисперсиясы** x(t)-ның орташа мәннен ауытқуы квадратының МК болып табылады:

$$\tilde{D}_x^2 = \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i^2) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N}\right], \qquad (7.4)$$

Формулалардың екіншісі алдын-ала x_i анықтауды талап етпейді. (7.4) формула – сұрыптамалық ығыспаған дисперсия, егер N-1 –ді N-ге ауыстырсақ, онда ығысқан дисперсия үшін формулаға ие боламыз, үлкен N үшін олар бірдей. Кейде дисперсияны пайызбен өрнектейді. $\sigma_x = D_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ - орташа квадратты қателік (Бессель формуласы).

ТҮ АБЖ –де (online) режимде дисперсияны рекурренттік формулалар бойынша есептеуге болады:

$$\bar{x}_i = (1-\alpha)\bar{x}_{i-1} + \alpha x_i \quad \bar{x}_i^2 = (1-\alpha)\bar{x}_i^2 + \alpha x_i^2 \quad \sigma_i^2 = \bar{x}_i^2 - (\bar{x}_i)^2 \qquad (7.5)$$

Автокорреляциялық функция (АКФ) (сурет 7.2а)

АКФ *x(t)* –ның келесі мәндерінің алдыңғы мәндерімен байланыс дәрежесін көрсетеді; уақыттың *t* мерзімінде *x1* мәніне ие болатын *x(t)* функциясы *t+τ* мерзімде *x2* мәнге ие болатын ықтималдылығын анықтайды:

$$\tilde{R}_{xx} = \frac{1}{N-l}\int_0^{T-\tau}\dot{x}(t)\cdot\dot{x}(t+\tau) = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N-l}\dot{x}_i\cdot\dot{x}_{i+l}, \qquad (7.6)$$

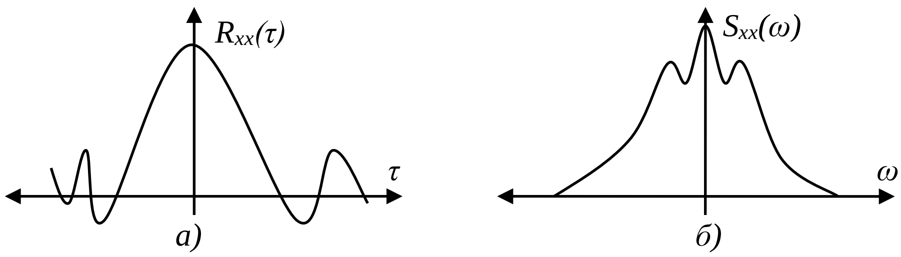
мұнда: $\dot{x}(t) = x(t) - m_x$, $\dot{x}_i = x_i - \bar{x}$ - орталыққа келтірілген (центрированный) уақыттық қатар; *l – l* қадамға ығысуы (лаг). Нақтылы үрдістерде x_i *және* x_{i+l} араларындағы байланыс ықтималдығы азаяды да, Rxx 2.1 суретте көрсетілген түрге ие болады. АКФ жұп функция болып табылады, оның графигі не ғұрлым күрт түсетін болса, сол ғұрлым x(t) мен x(t+τ) араларындағы байланыс әлсіздеу және керісінше; ақ шудың АКФ-сы δ-функция; *l*=0 болғанда $Rxx = \sigma_x^2$.

Өзара корреляциялық функция (ӨКФ)

ӨКФ уақыттың *t* мерзіміндегі кірістің *x(t)* мәндерінің *t-τ* уақыт мерзіміндегі шығыстың *y(t-τ)* мәндерімен байланыс дәрежесін көрсетеді.

$$\tilde{R}_{xy} = \frac{1}{N-l}\int_0^{T-\tau}\dot{x}(t)\cdot\dot{y}(t+\tau) = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N-l}\dot{x}_i\cdot\dot{y}_{i+l}\ , \qquad (7.7)$$

$R_{xy}(\tau)$ тақ функция, оның графигі АКФ графигіне ұқсас, бірақ объекттегі кешігу уақытына оң жаққа ығысқан.



Сурет 7.2 (а) Автокорреляциялық функцияның және (б) спектральдық тығыздықтың графиктері

Спектралдық тығыздық (СТ) АКФ – ден Фурье түрлендіруі болып табылады, АКФ-дан немесе кездейсоқ үрдістің (КҮ) іске асырылуын математикалық өңдеуден алынуы мүмкін. Ол КҮ қуатының қандай үлесі берілген жиілікке келетіндігін көрсетеді, объектінің жиілік қасиеттері туралы пікір жасауға мүмкіндік береді. Типтік графигі 7.2.б. суретте келтірілген. Көп жағдайда R_{xx} – ты алдын-ала бір өрнек арқылы аппроксимациялап $S_{xx}(\omega)$ - ты аналитикалық түрде алады.

$$S_{xx}(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cdot\cos(\omega\tau)d\tau = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (7.8)$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\cdot\cos(\omega\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_{xx}(\omega)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (7.9)$$

Өзара спектралды тығыздық $S_{xy}(\omega)$ үшін де өрнектер ұқсама түрде жазылады.

Идентификациялауда келесі өрнектерді пайдаланады:

$$S_{xy}(j\omega) = W(j\omega)\cdot S_{xx}(j\omega) \qquad (7.10)$$

$$S_{yy}(j\omega) = S_{xx}(j\omega)\cdot\left|W(j\omega\right|^2 \qquad (7.11)$$

Егер $S_{xx}(\omega)$ үрдістің *у* мәні жиіліктің -∞ ден ∞ дейін бүкіл аралығында бірдей бір мәнге ие болса, онда бұл ақ шу (АШ) деп аталатын, оның кез-келген кейінгі x(t) мәні алдыңғы x(t)-мен байланыспаған идеалды КҮ. Ақ шу үшін $R_{xx}(\tau) = S_{xx}\cdot\delta(\tau)$, мұндағы $\delta(\tau)$ - дельта-функция. Көп жағдайда ақ шудың орнына тұрақты және периодикалық құрамдассыз статистикалық сипаттары келесідей болатын КҮ пайдаланады:

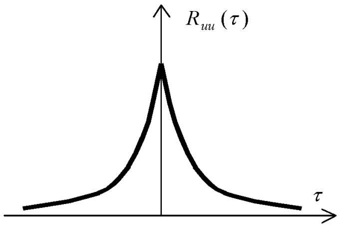
$$R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\mu|\tau|} \text{ және } S_{xx}(\omega) = \frac{2\mu D}{\mu^2+\omega^2}\ . \qquad (7.12)$$

АКФ және ӨКФ графиктерін түзудің еш қиындығы жоқ. Бырақ, идентификаттауда есептеулер үшін әдетте аналитикалық өрнектерді пайдаланады. Чебышевтың полиномдарымен аппроксимациялауды пайдаланудан басқа тәжірибеде АКФ-ны көрсеткіштік және басқа функциялармен аппроксимациялауды пайдаланады.

1) $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ (7.13) (7.2 сурет), мұнда: α = *const*, басылу параметрін және D_x - дисперсияны графикті аппроксимациялаудан табады. Спектральдық тығыздық үшін аналитикалық өрнектің түрі:

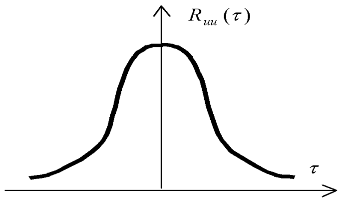
$$S_{xx}(\omega) = \frac{2D_x}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad (7.14).$$

Корреляциялық функция R_{uu} *(ф)* графигінің түріне (сурет 4.10) тәуелді оны келесі өрнектердің біреуімен аппроксимациялайды:



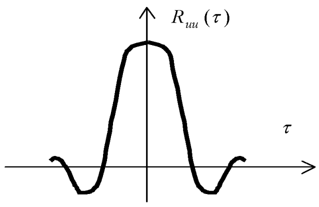
$$R_{uu}(\tau) = R(0)e^{-a|\tau|}$$

а)

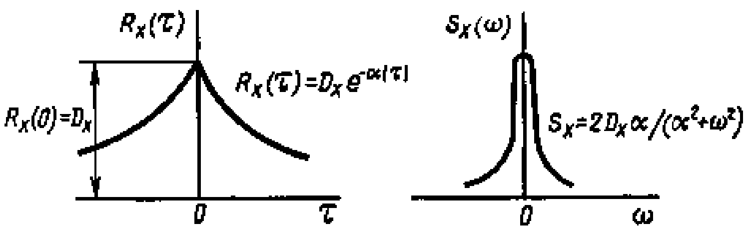


$$R_{uu}(\tau) = R(0)e^{-a\tau^2}$$

б)



$$R_{uu}(\tau) = R(0)e^{-a|\tau|}Cos(\omega\tau)$$



Сурет 7.3 – АФС және КҮ аппроксимациялау

2) $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau)$ (7.15)

(сурет 7.3), мұнда: ω_0 = const – резонанстық жиілік, одан:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2D_x}{\pi} \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}, \beta = \alpha^2 + \omega_0^2 \qquad (7.16)$$

3) $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}(\cos(\omega_0\tau) + \gamma \cdot \sin(\omega_0|\tau|)$ (7.17)

Кез-келген АКФ дәлдіктің кез-келген дәрежесінде (7.15, 7.16, 7.17) теңдеулердің сызықтық комбинациясымен сипатталуы мүмкін екендігі дәлелденуде.

Доказывается, что любая АКФ может быть с любой степенью точности описана линейной комбинацией уравнений (7.15, 2.16, 2.17).

Статистикалық идентификаттаудың жалпы мәселелері. Жүйелерді модельдеу тәжірибесінде өзінің жұмыс жасау барысында стохастикалық элементтерді қамтитын немесе сыртқы ортаның стохастикалық әсерлеріне ұшырайтын объекттермен тірлік жасау жиі кездеседі. Сондықтан осындай стохастикалық жүйелердің имитациялық модельдерінің көмегімен нәтижелерді алудың негізгі әдісі теориялық база ретінде ықтималдықтар теориясының шектік теоремаларды пайдаланатын ЭЕМде статистикалық модельдеу әдісі болып табылады.

Статистикалық модельдеу әдісінің жалпы сипаттамасы. Машиналық модельдерді (аналитикалық және имитациялық) құру және жүзеге асыру барысында жүйелерді зерттеу және жобалау кезеңінде статистикалық сынақтау (Монте-Карло) әдісі кең пайдаланылады. Ол әдіс кездейсоқ сандарды, яғни ықтималдықтардың таралуы берілген кейбір кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндерін пайдалануға негізделген. Статистикалық модельдеу модельденетін жүйеде өтетін үрдістер туралы статистикалық деректерді ЭЕМ көмегімен алу әдісі болып табылады. Сыртқы Е ортаның әсерлерін ескере отырып, модельденетін S жүйе сипаттамаларының қызықтыратын бағаларын алу үшін статистикалық деректер математикалық статистика әдістерін пайдалану арқылы өңделеді және классификацияланады.

Статистикалық модельдеу әдісінің маңызы. Сонымен, статистикалық модельдеу әдісінің маңызы зерттелетін S жүйенің жұмыс жасау үрдісі үшін кездейсоқ кіріс әсерлерді және сыртқы Е ортаның әсерлерін ескеріп жүйе элементтерінің тәртібі мен өзараәрекеттесуін имитациялайтын кейбір модельдеуші алгоритмін құруға және ЭЕМ-нің программа-техникалық құралдарын пайдаланып осы алгоритмді жүзеге асыруға келтіріледі.

Статистикалық модельдеу әдісін пайдаланудың екі саласын ажыратады:

1) стохастикалық жүйелерді зерттеу үшін;

2) детерминді есептерді шешу үшін.

Статистикалық модельдеу әдісімен детерминді есептерді шешу үшін пайдаланылатын негізгі идея - детерминді есепті кейбір стохастикалық жүйенің эквивалентті сұлбасымен алмастыру, соңғысының шығыс сипаттары детерминді есепті шешу нәтижесімен сәйкес келеді. Әрине, мұндай алмастыруда есептің дәл шешімінің орнына жуықталған шешім пайда болады және сынақтаулар N саны (модельдеуші алгоритмнің жүзеге асырулар саны) өскен сайын қателік азаяды.

S жүйені статистикалық модельдеу нәтижесінде ізделінетін шамалардың немесе функциялардың жеке мәндерінің сериясы пайда болады, оларды статистикалық өңдеу нақтылы объекттің немесе үрдістің уақыттың еркін моменттеріндегі тәртібі туралы мәліметтерді алуға мүмкіндік береді. Егер жүзеге асырулар саны N жеткілікті түрде көп болса, онда жүйені модельдеудің алынған нәтижелері статистикалық тұрақтылыққа иеленіп, S жүйенің жұмыс жасау үрдіс сипаттамаларының ізделінетін бағалары ретінде жеткілікті дәлділікпен қабылдануы мүмкін.

Жүйелерді ЭЕМде статистикалық модельдеу әдісінің теориялық негізі ықтималдықтар теориясының шектік теоремалары болып табылады. Кездейсоқ құбылыстардың (оқиғалар, шамалар) жиындары олардың тәртібін болжау мен қатар белгілі бір тұрақтылықты білдіретін кейбір орташа сипаттамаларын мөлшерлік бағалауға мүмкіндік беретін белгілі бір заңдылықтарға бағынады. Тән заңдылықтар әсерлер жиындарын қосындылағанда құрылатын кездейсоқ шамалардың таралуларында да байқалады. Бұл заңдылықтар мен орташа көрсеткіштердің өрнектелуі ықтималдықтар теориясының шектік теоремалары болып табылады. Шектік теоремалардың принципиальды мағынасы – сынаулардың (жүзеге асырулардың) саны N көп болғанда олар статистикалық бағалардың жоғары сапасына кепілдік береді.

Басқару объектілерін корреляциялық талдау әдісімен идентификаттау

Басқару объектілерін идентификаттау үшін корреляциялық талдау әдісі егер кіріс және шығыс сигналдар кездейсоқ шамалар болатын жағдайда пайдаланылады. АКФ және ӨКФ негізінде АФЖС анықтау мысалын қарастырайық.

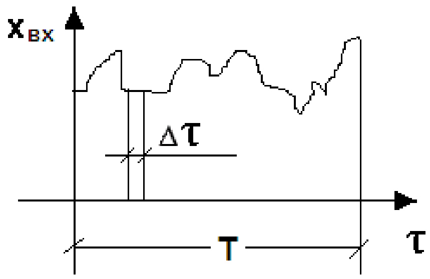
Сурет 7.4 – Объектті корреляциялық әдіспен зерттеу сұлбасы

Корреляциялық талдауда жоғарыда сипатталған:

- автокорреляциялық функция (АКФ) және
- өзаракорреляциялық функция (ӨКФ).

пайдаланылады.

Еске түсірейік, АКФ кездейсоқ шаманың алдыңғы мәндерінен Δτ ара-қашықтықта орналасқан кейінгі мәндерінің тәуелділігін сипаттайды.



Сурет 7.5 – Кіріс кездейсоқ шаманың – кіріс сигналдың өзгеру графигі

АКФ: $R_{x_{âõ}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_{âõ}(\tau + \Delta\tau)\cdot x_{âõ}(\tau)\cdot d\tau$. Δτ →0 ұмтылғанда – дәлірек.

Өзаракорреляциялық функция бір-бірінен Δτ ара-қашықтықта орналасқан екі шаманы байланыстырады.

ӨКФ: $R_{x_{âõ};x_{âûõ}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_{âûõ}(\tau + \Delta\tau)\cdot x_{âõ}(\tau)\cdot d\tau$.

АКФ және ӨКФ (кіріс-шығыс сигнал түрлі ω бар синусоидалы тербелістердің қосындысынан – гармоникалар қатарынан тұратын Фурье қатарына жіктелетін Фурье түрлендіруі арқылы) кездейсоқ шамалардың спектральды тығыздықтарымен байланысқан.

$$S_{x_{âõ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_{âõ}}(\tau)\cdot e^{-i\omega\tau}\cdot d\tau \text{ – АКФ үшін}$$

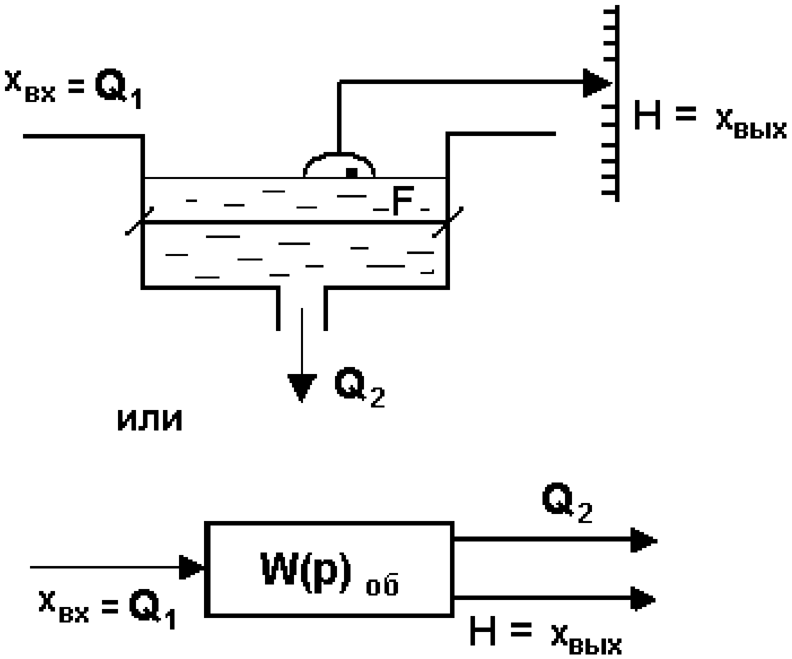
$$S_{x_{âõ};x_{âûõ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_{âõ};x_{âûõ}}(\tau)\cdot \Delta\tau\cdot d\tau \text{ – ӨКФ үшін.}$$

Физикалық тұрғыда $S_{x_{âõ}}(\omega)$ кездейсоқ шама қуатының қандай үлесі берілген жиілікке келетіндігін көрсетеді.

Спектральды тығыздық арқылы объекттің ізделінетін АФЖС табамыз:

$$\grave{A}\hat{O}\text{Æ}\tilde{N} = \overline{W}(i\omega) = \frac{S_{x_{\hat{a}\tilde{o}};x_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}}}(\omega)}{S_{x_{\hat{a}\tilde{o}}}(\omega)}.$$

Идентификаттаудың аналитикалық әдісі. Сипаттамалары бойынша зерттелетін объектпен бірдей (сәйкес) болатын математикалық модельді шығарудың аналитикалық әдісін объектте өтетін физика-химиялық үрдістер жақсы зерттелген жағдайларда пайдалануға болады. Мұндай объекттердің қатарына статика және динамикада тәртібі Ньютон заңдарына бағынатын механикалық жүйелер, оларда жай химиялық реакциялар өтетін кейбір химиялық реакторлар жатады. Мұндай объекттің қарапайым мысалы ретінде 7.5 суретте көрсетілген бакты қарастыруға болады.



Сурет 7.5 – Басқару объектісін аналитикалық әдіспен зерттеу сұлбасы

Осы объектте өтетін құбылыстарды сипаттайық.

Статикалық режим: $Q_1^0 = Q_2^0$ (құйылу ағып шығуға тең);

Динамикалық режим: $\begin{cases} Q_1 = Q_1^0 + \Delta Q_1 \\ Q_2 = Q_2^0 + \Delta Q_2 \end{cases}$

$$Q_1 - Q_2 = Q_1^0 + \Delta Q_1 - Q_2^0 - \Delta Q_2 = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{d(F \cdot \Delta H)}{d\tau} = F \cdot \frac{d(\Delta H)}{d\tau}$$

Гидравликадан: $Q_2 = \alpha \cdot \sqrt{H}$ немесе шағындар үшін: $\Delta Q_2 = a \cdot \Delta H$.

Онда: $\Delta Q_1 - a \cdot \Delta H = F \cdot \dfrac{d(\Delta H)}{d\tau}$

немесе, шексіз шағын өсімшелерге өтіп: $F \cdot \dfrac{dH}{d\tau} + a \cdot \Delta H = Q_1$

немесе $\dfrac{F}{a} \cdot \dfrac{dH}{d\tau} + H = \dfrac{1}{a} \cdot Q_1$

Салыстырмалы өлшемділікте белгілеп:

$$\frac{H}{H_{\hat{i}\hat{i}}} = x_{\o\hat{u}} \; ; \quad \frac{Q}{Q_{\hat{i}\hat{i}}} = x_{\hat{e}^3\eth}; \quad \frac{F}{a} = T_0; \quad \frac{1}{a} = k_{\hat{i}\acute{a}}$$

келесіні аламыз:

$$T_0 \cdot \frac{dx_{\o\hat{u}}}{d\tau} + x_{\o\hat{u}} = k_{\hat{i}\acute{a}} \cdot x_{\hat{e}^3\eth}$$

Осы ізделінген математикалық модель, ол әмбебап сипатқа ие (статистикалықтарға қарағанда). Оны пайдалануда қойылатын талап – барлық белгісіз айнымалылар берілуі тиіс.

Бақылау сұрақтары

1 уақыт қатарларының негізгі сипаттамалары;
2 Автокорреляциялық функция;
3 спектрлік тығыздық;
4 статистикалық модельдеу әдісінің мәні;
5 статистикалық сәйкестендірудің жалпы міндеттері;
6 корреляциялық талдау әдісімен басқару объектілерін сәйкестендіру;
7 аналитикалық сәйкестендіру әдісі.

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

8 лекция Өтпелі сипаттамаларды анықтау

Мақстаы: лекцияда қарапайым тестілеуші сигналдардың негізінде басқару объектілерін идентификаттау әдістері қарастырылған. Бұл әдістер дәстүрлі түрде инженерлік тәжірибеде пайдаланылады. Объект кірісіне регулярлы формадағы ұйытқуларды түсіргендегі өтпелі сипаттамаларды анықтау және уақыттық сипаттамаларды аппроксимациялау әдістері қарастыру.

Тезистер

Синусоидалы, сатылы және импульстік сигналдар көмегімен идентификаттау әдістері

Басқару жүйелерінде алғашқы болып жүзеге асырылған идентификаттау әдістері жиілік, сатылы және импульстік әсерлерді пайдалануға негізделген. Бұл әдістердің көбісі сызықты үрдістерге пайдаланумен шектеледі. Егер сигналдардың деңгейлері үлкен болмаса оларды сызықталған жүйелерде де пайдалануға болады (1 қосымшаны қараңыз). Бұл әдістер арнайы кіріс сигналдарды талап етеді, атап айтқанда: сатылы сигналдарды - өтпелі функция (сатылы өтпелі функция) бойынша идентификаттау үшін; импульстік кіріс сигналдарды – импульстік өтпелі функция бойынша идентификаттау үшін және түрлі жиіліктері бар синусоидалы кіріс сигналдарды – жиілік сипаттарды анықтау үшін. Жұмыстық қалыпты режиміне сәйкес болатын кіріс сигналдардың орнына жоғарыда көрсетілген арнайы сигналдар талап етілуіне байланысты бұл әдістер басқару үрдісінен тыс идентификаттауды көздейді. Сондықтан көрсетілген әдістер кіріс сигналдардың бір типі үшін алынған кіріс/шығыс қатынастар кіріс сигналдардың барлық басқа типтері үшін де сақталатын сызықты стационарлы үрдістерге ғана қолданылуы мүмкін.

Жоғарыда айтылған кіріс сигналдардың үш түрлерінің ішінде сатылы кіріс сигнал пайдалану үшін ең қарапайым болып табылады (ол, мысалы, кіріс клапанның ашылуына немесе жабылуына, немесе кіріс кернеуді қосу немесе ажыратуға сәйкес). Ал синусоидалы кіріс сигналды беру үшін синусоидалы әсерлерді қалыптастыру және сәйкес диапазонда жиілікті өзгерту талап етіледі. Импульстік әсер бойынша идентификаттауда импульстік кіріс сигналдарды қалыптастыру және пайдаланумен байланысты техникалық қиыншылықтар пайда болады. Бұл әдісті сызықталған жүйелерге қолдануға болмайды, себебі импульстің амплитудасы анықтама бойынша шағын болуы мүмкін емес.

Бұл жерде біз объект динамикасы математикалық моделін идентификаттау проблемасын қарастырамыз. Қарапайым тестілеуші сигналдар негізінде идентификаттау әдістерін пайдалануда зерттелетін объект кірісіне белгілі бір түрдегі кейбір ұйытқушы әсер беріледі. Одан кейін жүйенің осы сигналға қайтаратын қайтарымы уақыт функциясы сияқты тіркеледі. Ары қарай кіріс сигналды математикалық өңдеу орындалады. Мұндай өңдеудің мағынасы келесіде. Зерттелетін объект кейбір белгісіз математикалық модельмен сипатталады дейік. Онда өтпелі үрдістің пайда болған графигі белгілі бастапқы шарттарда және кіріс сигналдың белгілі математикалық моделінде объектті сипаттайтын дифференциалды теңдеудің шешімі болады деп санауға болады. Бұл **кері** деп аталатын есеп, анықтама бойынша ол қисынды (корректілі) қойылмаған есептер класына жатады, себебі оның шешімдер жиыны шексіз. Мұндай есептер регуляризацияны талап етеді, мысалы, объект туралы кейбір априорлы ақпаратқа сүйеніп, ізделінетін математикалық модельдің белгілі бір құрылымы мен түрін таңдау. Тәжірибеде объекттің қасиеттері коэффициенттері тұрақты (2.3) түрдегі кәдімгі сызықты дифференциалды теңдеулермен жеткілікті түрде дәл сипатталады деп жиі шамалайды:

$$a_{n+1}\frac{d^n x}{dt^n}+\ldots+a_2\frac{dx}{dt}+a_1 x=b_{m+1}\frac{d^m u}{dt^m}+\ldots+b_2\frac{du}{dt}+b_1 u\,.$$

Немесе объекттің адекватты математикалық моделі болып (2.8) түрдегі беріліс функция немесе оның (2.25) түрдегі айырымдық эквиваленті:

$$W(p)=\frac{C}{1+T\cdot p}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \qquad (*)$$

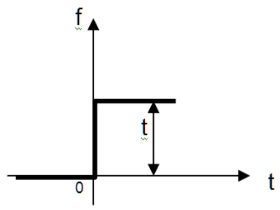
немесе күрделілеу (2.4) түрдегі (егер объект өзін-өзі деңгейлестіру қабілетіне ие болса) немесе өзін-өзі деңгейлестірмейтін объект үшін (2.9 – 2.11) түрдегі теңдеулер қызмет атқаруы мүмкін

(*) өрнектің қарапайымдылығына қарамастан ол шағын ауытқулар жағдайларында объекттердің кең класының динамикасын жеткілікті түрде дәл сипаттайды. Басқару жүйесін пайдалану жағдайларында (*) немесе жиі (2.25) түрдегі модельдердің коэффициенттерін бейімделік (адаптивті) корректировкасын жүзеге асыратын адаптациялау алгоритмдерібар.

Сызықты жүйе үшін суперпозиция принципі әділ, оның мағынасы – кез-келген ұйытқулардың қосындысына әрқайсысы сәйкес әсермен анықталатын шығыс реакциялардың қосындысына сәйкес; оның формасын өзгертпей кіріс ұйытқуды өзгерткенде шығыс шама да формасын өзгертпей дәл сондай өзгеріске ұшырайды.

Суперпозиция принципі элементарлы ұйытқулардың белгілі бір түріне қайтаратын реакция арқылы жүйенің кез-келген ұйытқуға қайтаратын реакциясын өрнектеуге мүмкіндік береді. Ол үшін еркін ұйытқуды таңдап алынған типтегі элементарлы әсерлер арқылы бейнелеу жеткілікті. Типтік ұйытқулар ретінде бірлік секірмелі функцияны, бірлік импульстік функцияны, бірлік сызықты функцияны, бірлік гармоникалық тебелісті, кездейсоқ екілік сигналды және с.с. жиі пайдаланады.

1 Бірлік секірмелі функция кейбір әсердің 0 ден 1 дейін шұғыл өзгеруін сипаттайды (сурет 8.1).



Сурет 8.1 - Бірлік секірмелі функция

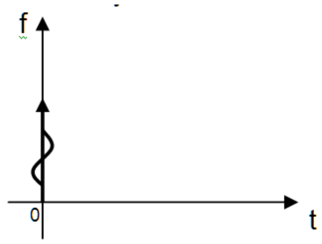
Аналитикалық түрде секірмелі функциюны келесідей жазады:

$$f(t)=1(t)=\begin{vmatrix} =0 \quad t=-0 \ \text{æàíå} \ \ t<0 \ \text{áîëãàíäà} \\ =1 \quad t=+0 \ \text{æàíå} \ \ t>0 \ \text{áîëãàíäà} \end{vmatrix} \qquad (8.1)$$

Яғни, ол келесі түрдегі сатылы бірлік әсер:

$$f(t)=1(t)=\begin{cases}1, t\geq 0\\ 0, t\leq 0\end{cases}$$

2 Бірлік импульстік функция қысқа мерзімді импульстік түткі сипатына ие болатын қысқа мерзімді ұйытқуды сипаттайды (сурет 8.2).



Сурет 8.2 - Бірлік импульстік функция

δ - Дирак функциясы (дельта – функциия) деп аталатын бірлік импульстік функция бірлік секірмелі функцияның бірінші туындысы болып табылады:

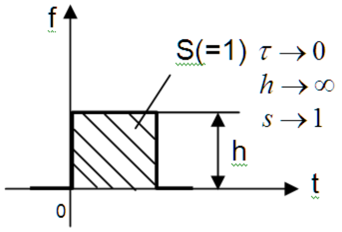
$$\delta(t) = 1'(t) = \frac{d1(t)}{dt} \tag{8.2}$$

және ол шексіз мәнді қабылдайтын $t = 0$ басқа барлық жерде нөльге тең, сонымен қатар $t = 0$ қамтитын кез-келген интервал бойынша одан алынған интеграл бірлікке тең шарты орындалады.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{8.3}$$

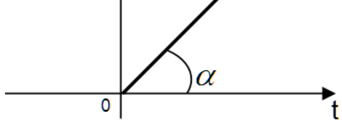
Яғни: δ(t)= $\delta(t) = \begin{cases} \delta(t) = \infty, t = t_0 \\ \delta(t) = 0, t \neq t_0 \end{cases}$.

Мұндай қасиеттерге ие болатын функцияны сол импульстің ұзақтығы нөльге ұмтылғанда бірлік ауданға ие болатын оңтаңбалы тікбұрышты импульстің шегі ретінде алуға болады (сурет 8.3).



Сурет 8.3 – Бірлік секірмелі функция түсінігіне

3 $k = 1$ болғандағы $f(t) = kt$ **бірлік сызықты функцияны** рампалық ұйытқу деп те атайды (сурет 8.4).

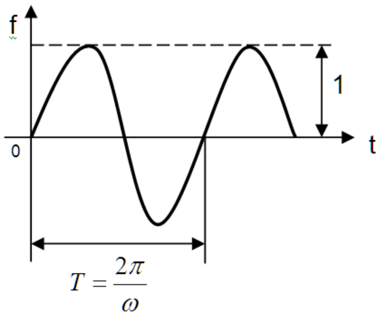


Сурет 8.4 - Бірлік сызықты функция

Мұндай ұйытқу бақылаушы реттеу жүйелері үшін типтік болып табылады.

4 Бірлік гармоникалық ұйытқуды жиі жағдайда синусоидалы заң бойынша өзгеретін функция сияқты жазады (сурет 8.5)

$$f(t) = \sin\omega t = e^{j\omega t} \tag{8.5}$$



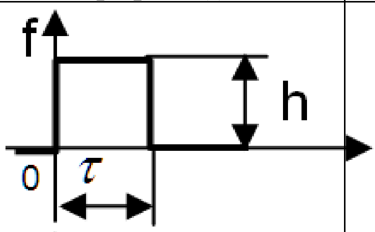
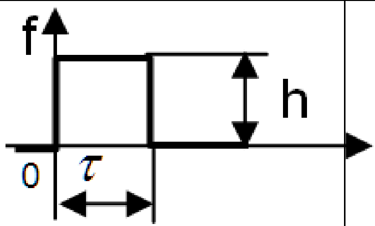
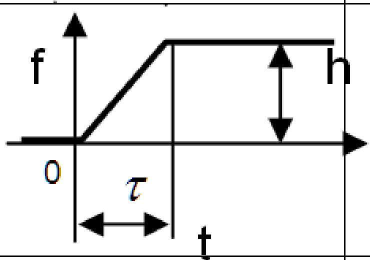
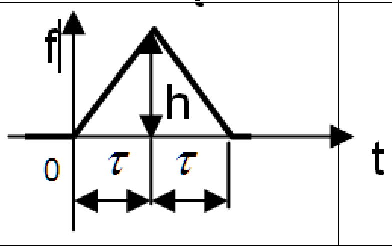
Сурет 8.5 – Бірлік гармоникалық ұйытқу

Ұйытқулардың мұндай түрін АРЖ жиілік талдау әдістерінде пайдаланады.

Ұйытқушы әсерлер ретінде типтік функциялар пайдалануы мүмкін, олардың кейбіреулері 8.1 кестеде келтірілген.

Кесте 8.1

Типтік ұйытқушы әсерлер

№п/п	Возмущение f(t)	График f(t)	Изображение F(p)
1	Ступенчатое при высоте ступени h		$\frac{h}{p}$ (8.6)
2	П-образное при высоте h и при длительности τ		$\frac{h}{p}(1-e^{-\tau p})$ (8.7)
3	Ступенчатое при высоте h и времени нанесения возмущения τ		$\frac{h}{\tau p^2}(1-e^{-\tau p})$ (8.8)
4	Треугольное при высоте h и времени нанесения возмущения 2τ		$\frac{h}{\tau p^2}(1-e^{-2\tau p})^2$ (8.9)

Идентификаттауда пайдаланылатын ең қарапайым кіріс сигнал - сатылы сигнал. Мұндай сигналды жүйенің кірісінде, мысалы, кіріс клапанды кенет ашу немесе жабу, немесе басқарушы кернеу/тоқты қосу немесе ажырату және с.с. арқылы қалыптастыруға болады. Идеальды сатылы сигналдың өсу уақыты нөльге тең, ол физикалық тұрғыда мүмкін емес, себебі мұндай жағдайда өсу жылдамдығы шексіз үлкен болуы тиіс. Сондықтан, кез-келген нақтылы сатылы кіріс сигнал идеальды сатылы сигналдың аппроксимациясы ғана болып табылады. Бырақ, егер сигналдың өсу уақыты ең жоғары гармониканың периодынан едәуір аз болса, онда идентификаттау қатесу мағынасыз болады. Бөгеуілдері бар үрдістерде немесе өлшеулер шуды қамтыған (тәжірибеде жиі орын алатын) жағдайларда шуды сәйкесінше фильтрлеу керек.

Өтпелі функция көмегімен идентификаттау басқару үрдісінен тыс, автономды жүргізіледі, сондықтан оны тек стационарлы үрдістерге ғана пайдалануға болады. Бырақ, сатылы ұйытқулар іске қосу кезінде немесе қалыпты жұмыс жасау барысында жүйелердің көбісіне әсерін тигізуіне байланысты өтпелі функцияларды жүйе жұмысының қалыпты режимін бұзбай жазуға болады. Қарастырылатын әдістің қосымша артықшылығы осында. Сонымен қатар, сатылы сигналдың амплитудалар диапазонында жүйе сызықты болып жорамалданады.

Реттелетін объекттің уақыттық динамикалық сипаттамасын алу үшін арнайы эксперимент ұйымдастырылады.

Жұмыстың орнықтырылған режиміндегі реттелетін объектке уақыттың кейбір моментінде кейбір ұйытқушы әсерді тигізеді де одан кейін реттелетін шаманың оның қалпына келген мәніне дейін ауытқуларын уақыт барысында сәйкес өлшеу аспаптың көмегімен тіркейді.

Экспериментті бастамай тұрып реттелетін объект жұмыстың орнықтырылған режимінде екндігіне көз жеткізу керек. Реттелетін шаманың өлшенген ауытқулары шынайлы болуы үшін тәжірибені 2-3 рет қайталау керек.

Эксперимент арқылы табылған объекттің динамикалық сипаттамасына объекттің өз сипаттамасы мен бірге тіркеуші аспаптың сипаттамасы қосылған.

Осыған байланысты физикалық шамалардың олардың номинальды мәндеріне ауытқуларының датчиктері ретінде берілген физикалық шаманы кейбір мәнде ұстап тұратын реттеуші құрылғының өлшеу блогына кіретін датчиктерді пайдаланған жөн.

Объекттің динамикалық сипаттарын анықтау үшін тәжірибеде көп жағдайда өтпелі сипаттамаы алу әдістемесін пайдаланады. Объекттің динамикалық сипаттарын оның өтпелі сипаттамасы (үдеу қисығы) бойынша анықтауда кіріске сатылы сынақ сигналы немесе тікбұрышты импульс беріледі. Екінші жағдайда өтпелі сипаттама (қайтарым қисығы) сәйкесінше үдеуі қисығына дейін құрылуы тиіс. Өтпелі үрдіс туралы деректерге сүеніп, объекттің беріліс функциясын алу үрдісі объектті идентификаттау деп аталады.

Өтпелі сипаттаманы алу барысында 8.2 кестеде көрсетілген бір қатар шарттарды орындау керек:

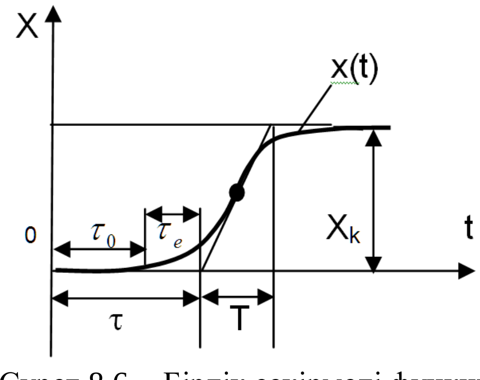
Кесте 8.2

Өтпелі сипаттаманы алу шарттары

№	Шарттар
1	Егер технологиялық параметрді тұрақтандыру жүйесі жобаланатын болса, онда өтпелі сипаттама үрдістің жұмыс нүктесінің айналасында түсірілуі тиіс.
2	Өтпелі сипаттамаларды басқарушы сигналдың оң және теріс секірмелерінде түсіру керек.

	Қисықтардың түрі бойынша объекттің ассиметрия дәрежесі туралы пікір жасауға болады. Ассиметриясы аз болса реттегіш баптауларын есептеуді беріліс функциялар параметрлерінің орташаланған мәндері бойынша жүргізу ұсынылады. Сызықтық асимметрия басқарудың жылулық объектілерінде жиі орын алады.
3	Шуланған шығыс бар болатын жағдайда бірнеше өтпелі сипаттамаларды (үдеу қисықтарын) түсіріп, одан кейін оларды бір-біріне қабаттастырып, орташаланған қисықты алған жөн.
4	Өтпелі сипаттаманы түсіру барысында үрдістің ең тұрақты режимдерін таңдау керек, мысалы, сыртқы кездейсоқ ұйытқулардың әсер тигізу ықтималдығы өте аз болатын түнгі ауысымдарды.
5	Өтпелі сипаттаманы түсіру барысында сынақ кіріс сигналдың амплитудасы, бір жағынан, шулардың жанында өтпелі сипаттама анық ерекшеленетіндей жеткілікті түрде үлкен болуы тиіс, ал екінші жағынан, технологиялық үрдістің қалыпты жүрісін бұзбау үшін жеткілікті түрде шағын болуы тиіс.

Өзін-өзі деңгейлестіретін басқару объектінің динамикалық сипаттамаларын оның өтпелі сипаттамасы бойынша анықтау. Реттеу объектінің динамикалық қасиеттерін анықтауда сатылы ұйытқушы әсерді өте жиі пайдаланады, яғни, объекттің өтпелі функциясын экспериментальды табады (сурет 8.6). Реттеу үрдісінің өзін-өзі деңгейлестіруі деп кіріс пен шығыс арасындағы тепетеңдік бұзылғаннан кейін реттелетін объект адамның немесе реттегіштің қатысуысыз сол қалыпты күйге қайта оралатын қасиетін атайды. Өзін-өзі деңгейлестіру реттелетін шаманы жылдамдау тұрақтандыруға ықпалын тигізеді, және сондықтан реттегіштің жұмысын жеңілдетеді. Бір кірісі және бір шығысы бар объект қарастырылады, оның қасиеттері: стационарлық, сызықтық, параметрлерінің жинақтылығы. Кіріске сатылы әсер беріледі және шығыста үдеу қисығы түсіріледі. **Кері** есепті шешу керек: белгілі үдеу қисығы бойынша теңдеудің коэффициенттерін анықтау керек.



Сурет 8.6 - Бірлік секірмелі функция

Бізді (*) түрдегі теңдеу қанағаттандыратын жағдайда оның параметрлерін табу оңай:

- күшейту коэффициенті – формула бойынша: $C = \frac{X_K}{\Delta U}$, мұнда: X_K - шығыстың тұрақталған мәні, ал ΔU – объекттің кірісіндегі ұйытқу;
- уақыттың Т тұрақтысын – үдеу қисығының иілу нүктесіндегі жанаманың проекциясы ретінде (сурет 8.6);

- кідіру τ уақыты – 0 нүктеден үдеу қисығының иілу нүктесіндегі жанаманың уақыт өсімен қиылысу нүктесіне дейінгі ара-қашықтық ретінде (сурет 8.6).

Адекваттылықты тексеру. Бұл проблеманы шешу үшін объекттің (*) түріндегі беріліс функциясында шығыс функцияны модельдеу керек. Яғни, бір кірісі және бір шығысы бар объект қарастырылады, оның қасиеттері: стационарлық, сызықтық, параметрлерінің жинақтылығы. Кіріске сатылы әсер беріледі және шығыста үдеу қисығы түсіріледі. Тура есепті шешу керек: белгілі беріліс функциясы бойынша үдеу қисығының графигін анықтау керек. Бұл қарапайм мысалда (2.13) теңдеуді пайдалану жеткілікті:

$$\hat{X}(t) = C \cdot \Delta U \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right)\right] \quad (t \geq \tau \text{ болғанда})$$

$$\hat{X}(t) = 0 \quad (t < \tau) \text{ болғанда}$$

8.7 суреттегі Mathcad жүйесінде шешілген мысалды қараңыз. Егер келесі формула бойынша табылған δ мәні 3-7% аспайтын болса, онда модель адекватты болып саналады:

$$\delta = \frac{100\%}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i - \hat{X}_i}{X_i}$$

Егер δ қатенің мәні өте үлкен болса, онда графиктегі жанаманың орнын ауыстыру керек (ол иілу сызығынан өтуі міндетті емес). Бұл да жәрдем бермесе, онда беріліс функцияны алудың дәлірек әдісін пайдалану керек, мысалы аудандар әдісін (Симою әдісін).

Өзін-өзі деңгейлестіретін объектілердің динамикалық сипаттамаларын аудандар әдісімен идентификаттау. Бұл әдіс басқару объектілерінің динамикалық сипаттамаларын идентификаттаудың инженерлік әдістерінің бірі болып табылады. Бұл әдіс ЭЕМде жүзеге асыру үшін де, қолмен есептеуге де ыңғайлы және тәжірибе үшін қанағаттанарлық дәлділікке ие.

Әдіс басқару үрдісінен тыс идентификаттауды көздейді, себебі ол АБЖ-ны қалыпты пайдаланудағы өлшеулердің нәтижелерін пайдаланбайды, ал объект кірісіне берілетін сатылы ұйытқуға қайтараытн объекттің қайтарым кисығын түсіру бойынша арнайы эксперименттерді өткізуді талап етеді. Осы экспериментальды алынған үдеу қисығы бойынша келесі түрдегі беріліс функцияның коэффициенттері анықталады:

$$W(p) = C \cdot W^* \cdot e^{-p\tau_3} \qquad (8.10)$$

мұндағы:

$$W^* = \frac{b_1 + \sum_{i=1}^{M} b_{i+1} p^i}{a_1 + \sum_{i=1}^{N} a_{i+1} p^i} \qquad M \leq N \qquad (8.11)$$

Өзін-өзі деңгейлестіретін объекттің күшейтк коэффициенті келесі формула бойынша есептеледі:

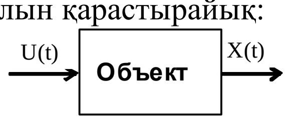
$$C = \frac{X_K}{\Delta U} \qquad (8.12)$$

Әдісті өзін-өзі деңгейлестірмейтін объектілердің үшін де пайдалануға болады.

Таза кешігу уақыты τ_3 үдеу қисығының графигінен ұйытқуды берген моменттен объект шығысында реакцияның пайда болуына дейін өткен уақыт ретінде анықталады.

Аудандар әдісі (8.11)-ге кіретін ai, bi, M, N коэффициенттерді анықтауға мүмкіндік береді.

Төмендегі суретте көрсетілген түрдегі құрылымдық схемаға ие болатын бір кірісі және бір шығысы бар стационарлы сызықты объекттің математикалық моделін анықтау үшін аудандар әдісін пайдалану мысалын қарастырайық:



8.8 суретте эксперимент нәтижесінде алынған үдеу қисығы көрсетілген. Өңдеу үшін уақыт бойынша Δt қадаммен берілетін шығыстың X_i дискретті мәндерімен бейнеленген уақыттың $t=\tau_3$ моментінен басталған үдеу қисығының бөлігі пайдаланылады. $t=\tau_3$ нүкте координаттардың жаңа басы ретінде қабылданады.

Есептеулерде нормаланған түрдегі үдеу қисығы пайдаланылады, ол бастапқыдан келесі формула бойынша алынады:

$$Z_i = 1 - X_i / X_k \tag{8.13}$$

Аудандар әдісінің мағынасы $(W^*)^{-1}$ функцияны p дәрежелері бойынша қиық қатарға жіктеуге келтіріледі, яғни келесі жіктелуге:

$$W^*(p)^{-1} = \frac{1}{W^*(p)} = 1 + \sum_{i=1}^{N} F_i p_i \tag{8.14}$$

(8.14) кіретін F_i интегральдық аудандар келесі формулалар бойынша есептеледі:

$$F_1 = \int_0^\infty Z(t)dt \tag{8.15}$$

$$F_2 = \int_0^\infty \int_0^t Z(t)dt^2 = F_1^2 = \int_0^\infty Z(t)(1-\theta)d\theta \tag{8.16}$$

$$F_3 = \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t Z(t)dt^3 = F_1^3 = \int_0^\infty Z(t)(1-2\theta+\frac{\theta^2}{2})d\theta \tag{8.17}$$

$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} :=$

Исходные данные			
№	t - время		x - выход
1	2,10	88,86	0,00
2	4,80	88,86	0,00
3	7,33	89,17	0,31
4	10,18	89,96	1,10
5	13,22	90,81	1,95
6	16,42	91,57	2,71
7	18,83	92,02	3,16
8	20,86	92,31	3,45
9	23,94	92,68	3,82
10	28,11	93,03	4,17
11	30,10	93,19	4,33
12	32,92	93,27	4,41
13	34,16	93,36	4,50
14	38,20	93,46	4,60
15	42,17	93,53	4,67
16	43,00	93,54	4,68
17	44,00	93,55	4,69
18	45,00	93,56	4,70
19	46,00	93,56	4,70
20	47,00	93,56	4,70

n -êîëè÷åñòâî òî÷åê êðèâîé ðàçãîíà $n := 20$ $i := 1..n$

Ñ - êîýôôèöèåíò óñèëåíèÿ îáúåêòà $C := \dfrac{x_n}{10}$ $C = 0.47$

τ - âðåìÿ çàïàçäûâàíèÿ îáúåêòà $\tau := 7.5$

Ò - ïîñòîÿííàÿ âðåìåíè îáúåêòà $T := 10$

Èñõîäíàÿ êðèâàÿ ðàçãîíà àïïðîêñèìèðóåòñÿ ïåðåõîäíûì ïðîöåññîì â àïåðèîäè÷åñêîì çâåíå ñ ïåðåäàòî÷íîé ôóíêöèåé:

$$W(p) = \frac{C}{1+T\cdot p}\cdot \exp(-p\cdot\tau)$$

è ïåðåõîäíûì ïðîöåññîì:

$$\hat{X}(t) = C\cdot\Delta U\cdot\left[1-\exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right)\right]$$ äëÿ $t \geq \tau$ èëè

$$X_i := \text{if}\left[t_i < \tau, 0, C\cdot 10\cdot\left[1-\exp\left[\frac{-(t_i-\tau)}{T}\right]\right]\right]$$

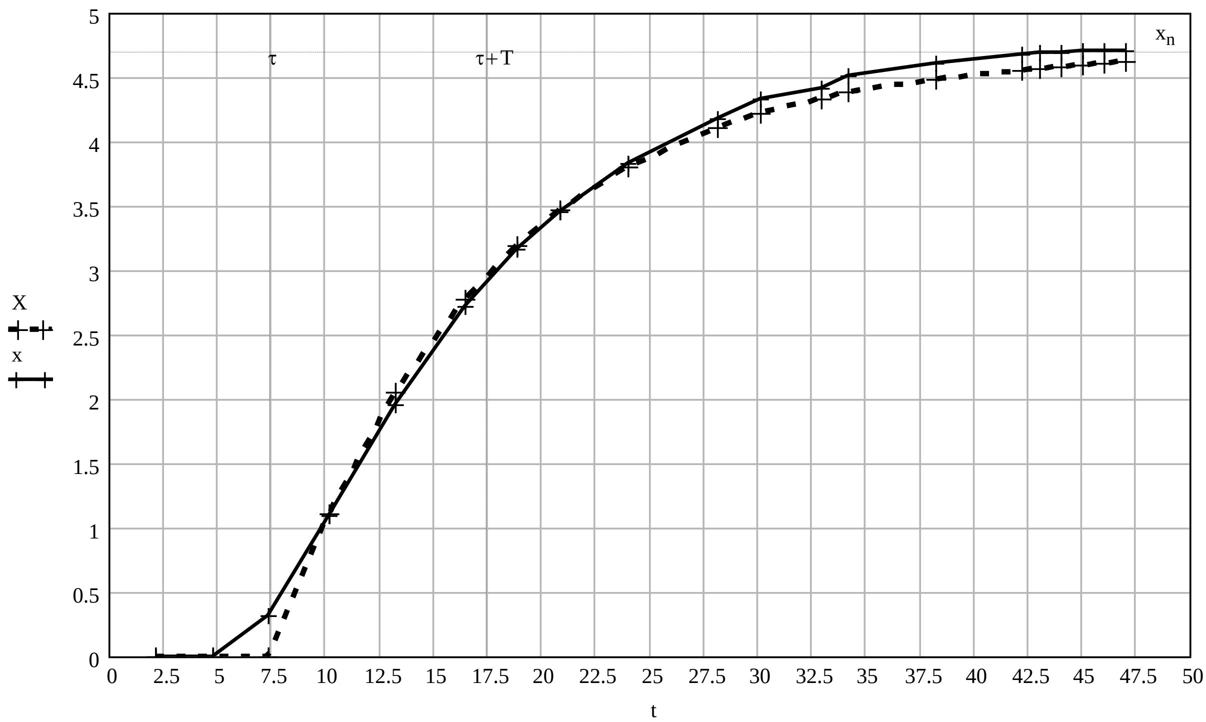
Ïðîâåðêà àäåêâàòíîñòè:

$$\delta := \left(\frac{100}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - X_i)}{x_i} \qquad \delta1 := \left(\frac{100}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{(|x_i - X_i|)}{x_i}$$

$\delta1 = 6.773$

$\delta = 5.838$

Ñïëîøíàÿ ëèíèÿ - èñõîäíàÿ êðèâàÿ ðàçãîíà, ïóíêòèðíàÿ ëèíèÿ - ðåçóëüòàò àïïðîêñèìàöèè



Сурет 8.7 – Адекваттылықты тексеру мысалы

F_i шамалары сандық интегралдау әдістерімен анықталады. Мысалы, егер трапециялар әдісін пайдалансақ, онда:

$$F_1 = \Delta t\ (S_1-0.5) \qquad (8.18)$$

$$F_2 = F_1\,\Delta t\ (S_2-0.5) \qquad (8.19)$$

$$F_3 = F_1^2\,\Delta t\ (S_3 - 0.5) \qquad (8.20)$$

....

$$F_l = F_1^{l-1}\,\Delta t\ (S_l - 0.5) \qquad (8.21)$$

мұндағы:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k} Z_i \qquad (8.22)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i (1 - \theta_i) \qquad (8.23)$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{k} Z_i \left(1 - 2\theta_i + \frac{\theta_i^2}{2}\right) \qquad (8.24)$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{k} Z_i \left(\frac{F_3}{F_1^3} - \frac{F_2}{F_1^2}\theta_i + \frac{\theta_i^2}{2!} - \frac{\theta_i^3}{3!}\right) \qquad (8.25)$$

. . . .

$$S_l = \sum_{i=1}^{k} Z_i \left(\frac{-\theta_i^{l-1}}{(l-1)!} + \frac{-\theta_i^{l-2}}{(l-2)!} + \sum_{j=0}^{l} \frac{F_{l-j-1}(-\theta^{i})}{F_1^{l-j-1}\ j!}\right) \qquad (8.26)$$

$$\theta_i = t_i / F_1 \qquad (8.27)$$

Сонымен Z_1, Z_2, Z_k мәндеріне ие болдық, F_i –ды есептеу қиын емес.

Беріліс функцияның N ретін келесі шарттан анықтауға болады: егер F_{i-1} –ге қарағанда F_i аз болса, немесе егер $F_i < 0$, онда N=i-1.

М шамасы келесі шарттардаң анықталады:

Егер X(0)=0, ал X'(0)#0, онда M=N-1

Егер X(0)=X'(0)=0, онда M<=N-2

Егер X(0)=X'(0)=X''(0), онда b2=b3=b4=...=0

bi және ai коэффициенттердің мәндері келесі теңдеулер жүйесін шешу арқылы табылады:

$$\begin{aligned} &a_1=1;\ b_1=1\\ &a_2=F_1+b_2\\ &a_3=F_2+b_3+b_2F_1\\ &a_4=F_3+b_4+b_3F_1+b_2F_2\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &a_l=F_{l-1}+b_l+\sum_{j=2}^{l-1} b_j F_{l-j} \end{aligned} \qquad (8.28)$$

Бұл жүйеде j>N+1 және j>M+1 болғанда әр ai немесе b_i орнына нөльдерді қойып шығып, одан кейін a_i мен b_i –ға қатысты шешу керек.

Қолмен есептеу барысында әдетте F_1, F_2, F_3 есептеумен шектеліп, егер $F_3<0$, немесе егер X'(0)#0, онда M=1, N=2 деп қабылдайды, яғни W*(p) беріліс функцияның түрі:

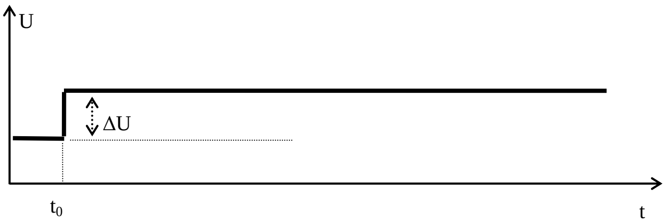
$$W^*(p) = \frac{b_1 + b_2 p}{a_1 + a_2 p + a_3 p^2} \qquad (8.29)$$

мұндағы: $b_1=1$; $b_2=-F_3/F_2$; $a_1=1$; $a_2=F_1+b_2$; $a_3=F_2+b_2F$

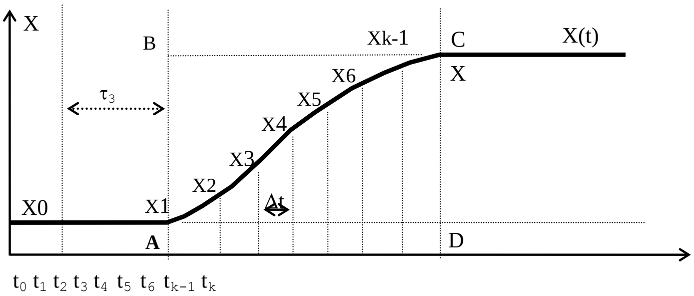
ал егер X'(0)=0 және $F_3>0$, онда M=0 ,N=3, ал беріліс функцияның түрі:

$$W^*(p) = \frac{1}{a_1 + a_2 p + a_3 p^2 + a_4 p^3} \qquad (8.30)$$

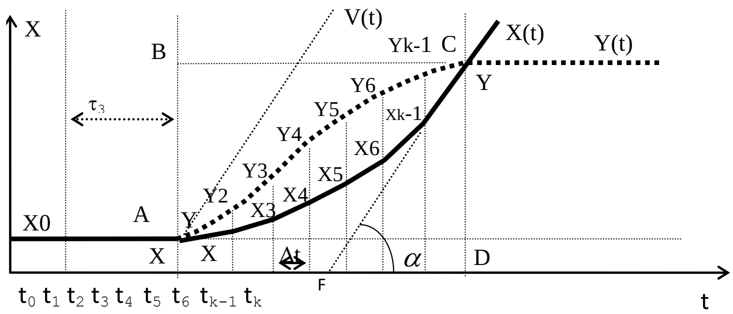
мұнда: $b_1=1$; $a_1=1$; $a_2=F_1$; $a_3=F_2$; $a_4=F_3$
(8.31)



Сурет 8.8 а – Объекттің кірісіндегі ұйытқу



Сурет 8.8 б - Өзін-өзі деңгейлестіретін объекттің үдеу қисығы



Сурет 8.8 в - Өзін-өзі деңгейлестірмейтін объекттің үдеу қисығы

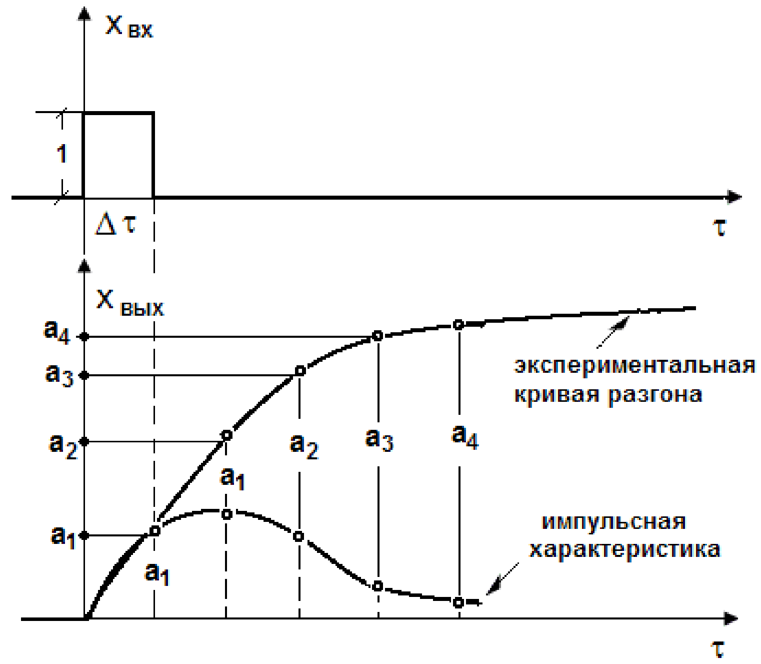
Қолмен есептеуде нәтижелерді келесі түрдегі кестеге түсірген ыңғайлы:
Кесте 8.4.

t_i	X_i	Z_i	θ_i	$1-\theta_i$	$Z_i(1-\theta_i)$	$1-2\theta_i+$□$\theta_i^{2}/2$	$Z_i(1-2\theta_i+$□$\theta_i^{2}/2)$
1	2	3	4	5	6	7	8

Бұл кесте К қатарды қамтиды. Алдыңғы екі бағана бастапқы деректерді – уақыт нүктелері мен шығыстағы мәндерді қамтиды. 4 бағандағы сандардың қосындысы S_1 мәнін, 6 бағанның қосындысы - S_2, 8 бағанның қосындысы - S_3 береді.

Сонымен қатар, өзін-өзі деңгейлестірмейтін өбъекттер де қарастырылған №5 [3] зертханалық жұмыста келтірілген мысалдарды қараңыз.

Басқарудың динамикалық объектісін импульстік сипаттама бойынша идентификаттау. Кейде технологиялық шарттар бойынша объект кірісінде «бірлік секірісті» ұзақ уақыт ұстап тұруға болмайды. Онда ұзақтығы шығыс сигналды байқалатындай өзгерту үшін жеткілікті болатын «бірлік импульс» типтегі ұйытқу беріледі. Тәжірибелік тұрғыда «бірлік импульс» тізбектелген екі «бірлік секірістер» ретінде қарастырылады, тек біріншісі (+1), ал екіншісі (-1) мәнге ие. Объектте алынған эксперименталды импульстік сипаттама – объекттің шығыс сигналының уақыт барысында өзгеру графигі графикалық түрлендірулер арқылы эксперименталдық үдеу қисығына дейін құрылады да ары қарай $W_{îá}(p)$ - математикалық модельді іздеу жоғарыда көрсетілген жолмен жасалады. Объекттің импульстік сипаттамасын экспериментальдық үдеу қисығына дейін қайта құру келесідей орындалады:



Сурет 8.6 - Экспериментальдық импульстік сипаттаманы үдеу қисығына түрлендіру сұлбасы

Бақылау сұрақтары

1 синусоидальды, сатылы және импульстік сигналдармен сәйкестендіру әдістері;
2 өтпелі сипаттаманы алып тастау шарттары
3 басқару объектісінің динамикалық сипаттамаларын оның өтпелі сипаттамасы бойынша өздігінен тегістеу арқылы анықтау;
4 аудандардың әдісімен өздігінен тегістеу арқылы объектілердің динамикалық сипаттамаларын сәйкестендіру;
5 динамикалық басқару объектісін импульстік сипаттама бойынша сәйкестендіру.

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

9 лекция Жиілік сипаттамаларды анықтау

Мақсаты: лекцияда қарапайым тестілеуші сигналдар негізінде басқару объектілерін идентификаттау әдістері қарастырылған. Бұл әдістер дәстүрлі түрде инженерлік тәжірибеде пайдаланылады. Объект кірісіне периодтық сипаттағы ұйытқуларды бергендегі жиілік сипаттамаларды анықтау және эксперименталды жиіліктік сипаттамаларды аппроксимациялау қарастыру.

Тезистер

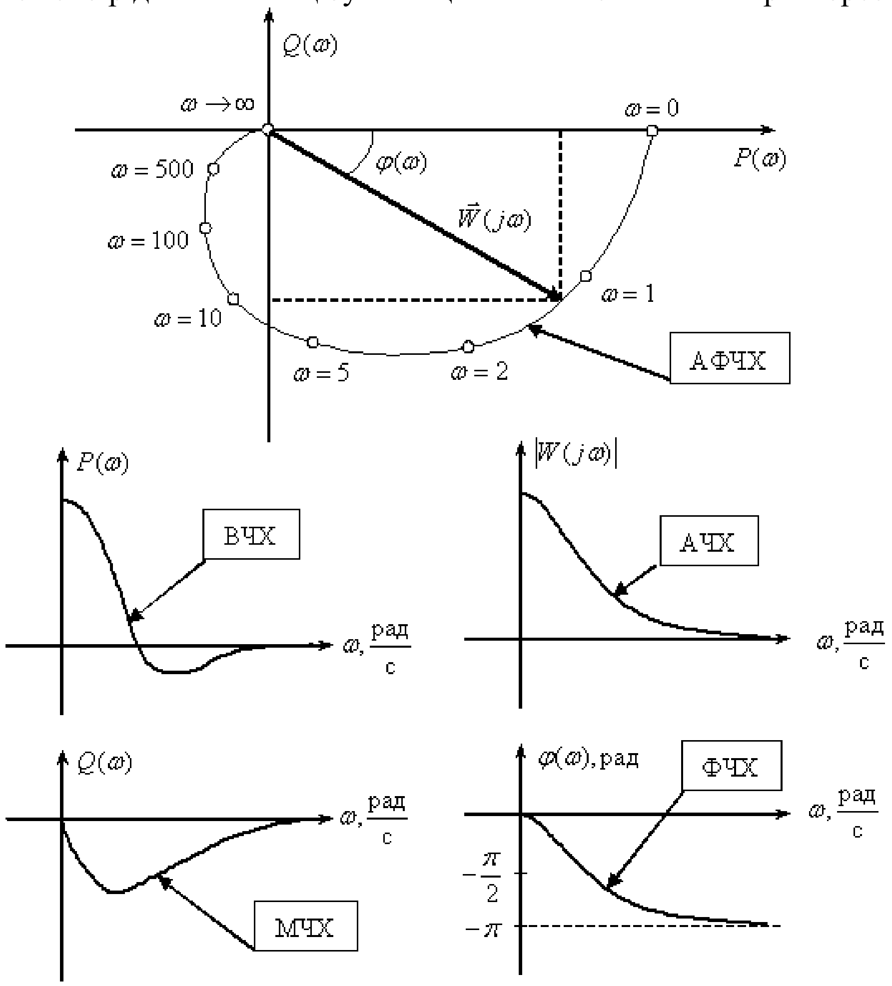
Динамикалық буынның жиіліктік сипаттмлары. Динамикалық буынның жиіліктік сипаттамасы деп беріліс функция өрнегіндегі *p*- ны jω-ға формальды түрде алмастыру арқылы алынған кешенді jω аргументтің функциясын атайды.

Жоғарыда қарастырылған (2.19-2.21) формулалар жиілік сипаттамалардың әртүрлі түрлері арасындағы байланысты сипаттайды.

Еске түсірейік, динамикалық буынның жиіліктік сипаттамасын шығыс сигнал спектрінің (Фурье түрлендіруін) кіріс сигнал спектріне қатынас ретінде анықтауға болады.

Буынның жиіліктік сипаттамасын білу кіріс спектр бойынша шығыс спектрді анықтауға мүкіндік береді.

9.1 суретте кейбір динамикалық буынның жиіліктік сипаттамалары көрсетілген.



Сурет 9.1 – Жиіліктік сипаттамалар

Сызықты жүйенің кірісіне келесі түрдегі сигнал берілсе:

$$U(t) = A_u \sin(\omega t) = A_u \cdot \exp(j\omega t) \tag{9.1}$$

шығыста келесі сигнал болады:

$$X(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi) = A_x \cdot \exp(j\omega t + \varphi), \tag{9.2}$$

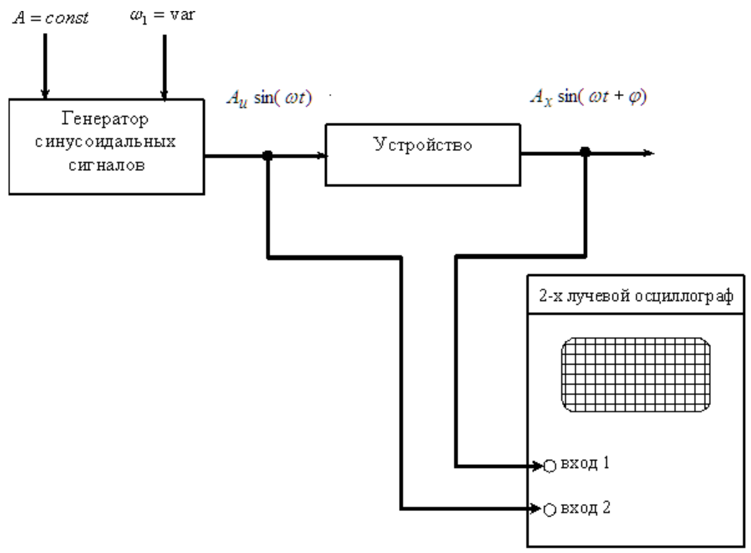
Осыдан нақтылы ω_1 жиілік үшін сызықты динамикалық буынның, объекттің немесе басқару жүйесінің жиіліктік сипаттамаларын экспериментальды анықтаудың қарапайым алгоритмі шығады:

- объект кірісіне жиілікті ω_1 және амплитудасы тұрақты болатын синусоидалы сигналды беру;
- өтпелі үрдістің еркін құрамдасының басылуын күту;
- шығыс сигналдың амплитудасын және кіріс сигналға салыстырмалы оның фаза бойынша ығысуын өлшеу.

Шығыс тұрақталған сигнал амплитудасының кіріс сигнал амплитудасына қатынасы ω_1 жиіліктегі жиіліктік сипаттаманың модулін анықтайды.

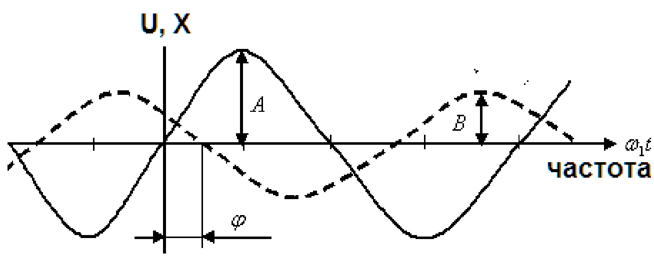
Кіріс сигналға салыстырмалы шығыс сигнал фазасының ығысуы ω_1 жиіліктегі жиіліктік сипаттаманың бұрышын (аргументті) анықтайды.

Осы алгоритмді 0 ден шексіздікке дейін жиіліктер үшін қолданып, нақтылы құрылғының жиіліктік сипаттамасын экспериментальды жолмен анықтауға болады. Жиіліктік сипаттамаларды түсіруге арналған экспериментальды құрылғының функциональды сұлбасының түрі 9.2 суретте көрсетілген.



Сурет 9.2 – Жиіліктік сипаттамаларды түсіру

ω_1 жиілікте еркін құрамдасы басылғаннан кейін осциллографтың экран бетінде 9.3 суретте көрсетілген бейнені аламыз. Ескерту, жиіліктік сипаттамаларды түсіру процедурасы – ұзақ процедура, сбебі бір тәжірибеде – 9.3 графиктің тек бір нүктесі ғана алынады.



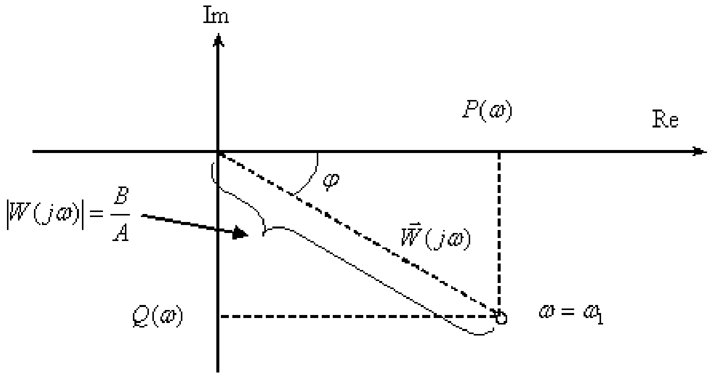
А – кіріс $A_u \sin(\omega t)$ сигналдың амплитудасы;

В - шығыс $A_x \sin(\omega t + \varphi)$ сигналдың амплитудасы;

ϕ - фаза бойынша ығысу

Сурет 9.3 – Жиіліктік сипаттамаларды түсірудегі кіріс және шығыс сигналдар

Алынған деректердің негізінде кешенді жазықтықта құрылғының жиіліктік сипаттамасына қатысты нүктені құруға болады, ал жиілікті нөльден шығыс тұрақталған сигналдың амплитудасы өте шағын шама болғанға дейін өзгерткендегі нүктелер жиынтығы амплитудалы-фазалық жиіліктік сипаттама (АФЖС) болып табылады. Суреттен көрінетіндей, бұл деректер бойынша құрылғының кез-келген қажетті жиіліктік сипаттамасын құруға болады.



Сурет 9.4 – АФЖС графигі

Түрлі объекттердің жиілік сипаттамаларын эксперименталььды алу үшін инженерлік тәжірибеде арнайы аспаптарды қолданады, ал соңғы кездері мұндай мақсаттар үшін арнайы енгізу-шығару платаларымен және қолданбалы программалар пакеттерімен жабдықталған дербес компьютерлер кең пайдаланылады.

Жоғарыда айтылғаннын бәрін ескере отырып, жиілік сипаттаманың физикалық мағынасы да анық болады. Ол тұрақталған режимде жұмыс жасайтын динамикалық буын (құрылғы) жиілігі ω кіріс синусоиданың амплитудасын неше есе өзгеретіндігін және кіріс синусоиданы фаза бойынша қандай бұрышқа ығыстыратындығын көрсетеді.

Жиіліктік сипаттамалары бойынша объекттің беріліс функциясын анықтау. Есептеулер үшін бір қатар жеткілікті түрде күрделі әдістер және жиіліктік сипаттамаларды өңдеуге арналған есептеуіш құрылғылар бар.

Әдістердің біреуін қарастырайық. Идентификаттаудың бұл әдісі параметрлі емес әдістер қатарына жатады, себебі алдымен эксперименталььды түрде объекттің жиіліктік сипаттамаларын түсіреді, ал одан кейін алынған эксперименталььды сипаттамалар бойынша беріліс функцияны есептейді. Эксперименттерді жүргізудегі негізгі қиыншылықтар – жиіліктердің жұмыстық диапазонын анықтау және объекттің шығысындағы тербелістер өсінің дрейфі. Жиі жағдайда жұмыстық жиіліктер аумағы шамалап беріледі де ең үлкен көңіл кіріс және шығыс гармоникалық сигналдар арасындағы фаза бойынша ығысу 180^0 болатын аралыққа аударылады.

Жиіліктік сипаттамаларды түсіруде объектке әсер тигізудің түрлі әдістерін пайдаланады.

Синусоидалы толқын әдісі объекттің кірісіне гармоникалық тербелістерді беруді көздейді. Жұмыстық диапазонның ішінен таңдап алынған әрбір жиілікте жеке тәжірибе жүргізіледі. Зерттелетін объекттің кірісінде таңдап алынған жиіліктің тербелістері қоздырылады. Тербелістер үрдісі тұрақталғаннан кейін және тербелістердің өсі, олардың формасы мен амплитудасы өзгермейтін болғанда кіріс және шығыс тербелістердің амплитудалары мен олардың аразындағы фазалық ығысуды өлшейді. Шығыс тербелістер амплитудасын кіріс тербелістер амплитудасына бөлудің бөліндісі алынған жиіліктегі жиіліктік сипаттаманың амплитудасын, ал фаза бойынша ығысу – фазалық жиіліктік сипаттаманың ординатасын береді.

Бұл әдісті пайдаланудағы негізгі қиыншылық – дұрыс синусоидалы формаға ие үлкен қуатты тербелістерді қоздыру қажеттілігі.

Сондықтан жиі жағдайда «тікбұрышты» толқын әдісін пайдаланады. Бұл жағдайда объекттің кіріс шамасын өлшейтін аспап бойынша осы шаманы өзгертетін реттегіш мүшенің үш жағдайы градуировкаланады. Ортадағы күй сынаулардың басында объект жұмысының режимі тұрақталатын кіріс шаманың мәніне сәйкес (тербелістер өсі); қалған екеуінің арақашықтығы ортаншы жағдайдан екі жаққа бірдей. Тәжірибені бастаудың алдында реттеуші мүше ортаншы жағдайға орнатылып, объектте тұрақты режим орнатылғанша сол күйде ұстап тұрылады. Одан кейін реттеуші мүше уақыттың бірдей таңдап алынған жиіліктің жарты периодына сәйкес аралықтары сайын бір шекті жағдайынан екіншісіне және кері аударылады. Бұл ауыстырып-қосылулар объекттің шығысындағы y(t) тербелістер тұрақталған форманы қабылдағанша жалғастырыла береді.

Объекттің шығысындағы тербелістердің алынған осциллограммалардың негізінде, бірінші және үшінші гармоникалардың амплитудалар мен фазаларын есептеумен шектеліп, олардың гармоникалық талдауын жүргізеді:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt;$$

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt; \qquad (9.3)$$

$$a_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2};$$

$$\varphi_k = arctg\left(\frac{b_k}{c_k}\right)$$

мұнда: T – тербелістердің периоды; к – гармониканың нөмірі.

Егер шығыс шаманың мәндері тек уақыттың аралықтары бірдей, дискретті моменттерінде ғана белгілі болса, онда (9.3) интегралдар қосындылармен алмастырылады:

$$b_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos\left(2\pi\frac{ik}{N}\right);$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin\left(2\pi\frac{ik}{N}\right); \qquad (9.4)$$

мұнда: N – шығыс сигналдың дискреттер саны.

Кіріс тікбұрышты сигналдың гармоникалық талдауы келесі өрнекке әкеледі:

$$u(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \ldots\right] \qquad (9.5)$$

мұнда: A – тікбұрышты толқынның амплитудасы.

Кіріс және шығыс гармоникалық құрамдастардың амплитудалары мен фазаларын есептеп, объекттің шығысы мен кірісіндегі гармоникалық құрамдастардың амплитудаларының қатынасы ретінде таңдап алынған жиіліктегі амплитудалы-жиіліктік сипаттаманың мәндерін және сәйкесінше φ_k фазалық ығысу ретінде фаза-жиіліктік сипаттаманың мәндерін есептеуге болады.

Жиіліктік сипаттамаларды анықтаудың дәлділігін жоғарылату үшін гармоникалық талдауда тек бірінші гармониканы ғана қолдану ұсынылады.

Экспериментті әдетте кіріс және шығыс сигналдар арасындағы фазалық ығысу π-ға тең болатын жиілікте бастайды. Оған позициялық реттегіштің сезімталдықсызының нөльдік зонасында және теріс кері байланыста қол жеткізіледі. Теріс кері байланыста сезімталдықсыз зонасын үлкейту арқылы автотербелістер жиілігін азайтады. Оңтаңбалы кері байланыста сезімталдықсыз зонасын үлкейту арқылы автотербелістер жиілігін үлкейтеді.

Эксперименттердің нәтижелері тікбұрышты толқын әдісіндегідей өңделеді.

Қаарстырылған әдістердің негізгі кемшіліктері – эксперименттің ұзақ мерзімі, ол уақыт негізінде тербелістердің тұрақталған режимін күтуге және жиіліктік сипаттамаларды аппроксимациялау үшін жеткілікті болатын ординаталарының мәндерін алуға жұмсалады. Эксперименттерді жылдамдату үшін кейде объекттің кірісіне жиіліктері әртүрлі болатын гармоникалық құрамдастардың қосындысы беріледі. Шығыс шаманың тұрақталған тербелістерін де гармоникалық талдайды және сол сәтте жиіліктік сипаттаманың бірнеше ординаталарын табады. Бырақ, бұл жағдайда полигармоникалық әсерлердің арнайы көзі және объекттің сызықтылығы қажет.

Жиіліктік сипаттамалар бойынша беріліс функцияның аналитикалық өрнегін бірнеше тәсілдермен анықтауға болады. дискреттік ординаталары бойынша беріліс функция үшін өрнекті аналитикалық есептеуге мүмкіндік беретін тәсілдердің біреуін қарастырайық.

Беріліс функция үшін өрнекті келесі қатар түрінде іздейміз:

$$W(p) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{1-p}{1+p} \right)^k \qquad (9.6)$$

Онда келесі орнына қоюды орындап:

$$tg\left(\frac{\varphi}{2} \right) = \omega \qquad (9.7)$$

нақтылы жиіліктік сипаттама үшін өрнекті келесі түрде жазуға болады:

$$U(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\varphi) \qquad (9.8)$$

Егер енді экспериментальды алынған нақтылы жиіліктік сипаттаманы гармоникалық талдау жасасақ, онда нәтижеде беріліс функцияның белгісіз $A_к$ коэффициенттері алынады.

(9.8) қатардың мағыналы мүшелерімен шектеліп, объекттің беріліс функциясының өрнегін (9.6) түрде жазуға болады.

Беріліс функцияны есептеудің бұл әдісін пайдалануға қойылатын шектеулер өзін-өзі деңгейлестіретін, тұрақты және минимальды емес-фазалық объекттерге қатысты. Объект бұл талаптарды қанағаттандырмайтын болса, онда нақтылы жиіліктік сипаттаманы есептеу барысында осы сипаттаманың түріне интегрирлеуші буындар мен кешігу буындардың тигізетін әсерін ескеру керек.

Кешігуді компенсациялау келесі өрнекпен жүзеге асырылады:

$$U_3(\omega) = U(\omega)\cos\omega\tau - V(\omega)\sin\omega\tau \qquad (9.9)$$

ал интегрирлеуші буындарды компенсациялау:

$$U_{\grave{e}}(\omega) = \frac{V(\omega)}{\omega} \qquad (9.10)$$

мұнда: U(ω) және V(ω) - экспериментальды нақтылы және жорамал жиіліктік сипаттамалар.

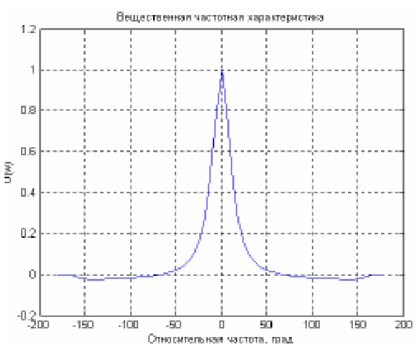
Мысал. Беріліс функциясы келесідей болатын объектті идентификаттауды орындайық:

$$W(p) = \frac{2.5}{(p+0.1)(p^2+6p+25)} \qquad (9.11)$$

Идентификатау төменде келтірілген MATLAB программасымен жүргізілген:

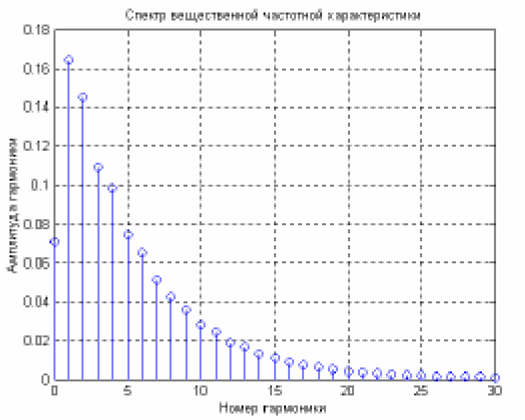
```
k=2.5;p1=-.1;p2=-3+4*i;p3=-3-4*i;
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);
%wo=tf(1,[1 2 1]);
f=0:180/30:180;
w=tan(pi*f/360);
H=freqresp(wo,w);% Объекттің амплидудалы-жиіліктік сипаттамасын есептеу
H=squeeze(H);
U=real(H);%  Объекттің нақтылы сипаттамасын есептеу
n=length(U);
u=[U(n:-1:2);U];
ab=fft(u)/(n-1); % нақтылы сипаттаманы Фурье-түрлендіру
f=angle(ab);
a=abs(ab);
a(1)=a(1)/2;
w0=tf([-1 1],[1 1]);
ws=a(1);nun=a(1);
pp=[1 1];pm=[-1 1];
den=1;d=1;
% (9.6) бойынша объекттің беріліс функциясын есептеу
for j=2:(n+1)/2
 den=conv(den,pp);
 d=conv(d,pm);
 nun=conv(nun,pp)+a(j)*d;
 ww=tf(nun,den)
end
ww=minreal(ww)% Беріліс функцияның минимальды жүзеге асырылуын алу
step(ww,wo)
pause
bode (ww,wo)
pause
[wb,g]=balreal(ww); )% Беріліс функцияның балансталған жүзеге асырылуын алу
wm=modred(wb,[4:(n-1)/2]);
step(wm,ww,wo)
ww=zpk(tf(wm))
```

9.5 суретте жиіліктің $\varphi = 2arctg(\omega)$ салыстырмалы мәндері үшін объекттің алынған нақтылы жиіліктік сипаттамасы көрсетілген



Сурет 9.5 – Объекттің нақтылы жиіліктік сипаттамасы

9.6 суретте гармоникалардың Ак амплитудаларын табуға мүмкіндік берген нақтылы жиіліктік сипаттаманы гармоникалық талдау нәтижелері көрсетілген.



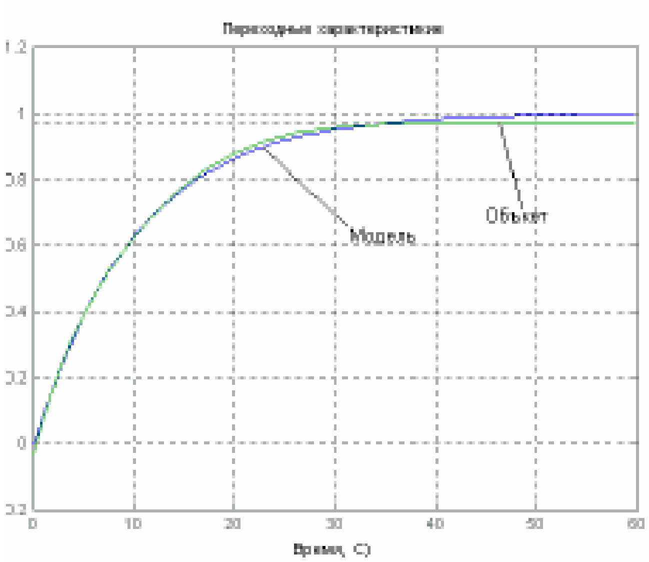
Сурет 9.6 – Алынған нақтылы жиіліктік сипаттамасын гармоникалық талдау нәтижесі

(9.6) модельдің балансталған жүзеге асыруының үш құрамдастарын ұстап тұрып (9.6) формула бойынша беріліс функцияны есептеу келесі өрнекті береді:

$$W(p) = \frac{-0.038723\,(s-2.923)(s^2+1.2386\,s+0.04178\,)}{(s+0.1553\,)(s^2+0.2452\,s+0.03147\,)}$$

(9.12)

Идентификаттау нәтижесінде алынған бастапқы модель мен оның моделінің өтпелі сипаттамалары 9.6 суретте көрсетілген. Қарастырылған әдістің идентификаттау қателігі үлкендеу, әсіресе объекттің беріліс коэффициентін анықтауда.



Сурет 9.3 – Бастапқы объекттің және оның моделінің өтпелі сипаттамалары

Бақылау сұрақтары

1 динамикалық байланыстың жиілік сипаттамалары;
2 жиілік сипаттамалары бойынша объектінің берілу функциясын анықтау;
3 кіріс және шығыс гармоникалық компоненттердің амплитудасы мен фазасын есептеу

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007
5. Семенов А.Д., Артамонов Д.В., Брюхачев А.В. Басқару объектілерін анықтау: Оқулық. жәрдемақы. - Пенза: Пенц баспасы. күй Университет, 2003.- 211 б.
6. Инков А.М. Басқару объектілерін модельдеу және сәйкестендіру. Арнайы студенттерге арналған зертханалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар. 050702. Шымкент, ОҚМУ, 2010, -78 б.

10 лекция Идентификациялау үрдісінің жалпы сұлбасы

Мақсаты: идентификациялаудың негізгі кезеңдері, априорлы және апостериорлы ақпарат ұғымдары, идентификациялау сапасынын көрсеткіштері мен критерийлері, идентификациялау әдістерін классификациялау, құрылымдық және параметрлік, активті және пассивті идентификациялау принциптері қарастырылған.

Тезистер

Идентификаттаудың кезеңдер тізімі. Техникалық жүйелерді математикалық модельдеу технологиясы жалпы жағдайда келесі негізгі кезеңдерді орындауды көздейді:

1 **Мақсатарды тұжырымдау**. Модельдеу проблемасының кез-келген мәселесінің негізінде бізді қандай тәуелділіктер қызықтыратыны, оны пайдалану мақсаттары туралы ақпарат жатады. Бұл мәліметтер өте жуықталған болуы мүмкін, бырақ, әрдайым модельдеу мақсаттарын тиімді тұжырымдау үшін жеткілікті болатын оның кейбір қасиеттерін бейнелейді. Әдетте модельдеу есептерінде мақсаттық функция түрінде берілетін кейбір критерийді максимизациялау немесе минимизациялау арқылы мақсатқа қол жеткізіледі.

2 **Объектті зерттеу**. Бұл кезде өтетін үрдісті түсіну, қоршаған орта мен объекттің шекараларын анықтау талап етіледі. Сонымен қатар, бұл кезеңде зерттеу объектісінің барлық кіріс және шығыс параметрлерінің тізімі және модельдеу мақсатарына қол жеткізуге олардың тигізетін әсері анықталады.

3 **Сипаттамалық модельдеу** (концептуальды модельді жетілдіру) – объекттің кіріс және шығыс параметрлерінің негізгі байланыстарын анықтау және сөзбен фиксациялау.

4 **Математикалық модельдеу** (математикалық модельді жетілдіру) – сипаттмалаық модельді формальды математикалық тілге аудару. Мақсат әдетте мақсаттық деп аталатын функция түрінде жазылады. Объекттің тәртібі қатынастар арқылы сипатталады. Бұл кезеңде зерттелетін проблеманың күрделілігіне тәуелді бір қатар таза математикалық есептер пайда болуы мүмкін. Олар: математикалық программалау, сызықты алгебра, дифференциальды және интегральды есептеулер және с.с.

5 **Есепті шешу әдісін таңдау** (немесе құру). Бұл кезеңде пайда болған математикалық есеп үшін лайықты әдіс таңдап алынады. Мұндай әдісті таңдау барысында әдістің күрделігіне және пайдаланылатын есептеу ресурстарына назар аудару керек. Қойылатын критерийлер бойынша лайықты әдіс болмаса, онда есепті шешудің жаңа әдісін жетілдіру қажет.

6 **Компьютерлік программаларды таңдау немесе жазу**. Бұл кезеңде шешудің таңдап алынған әдісін жүзеге асыратын лайықты программа таңдалады. Егер ондай программа бомаса, сондай программаны жазу керек.

7 **Есепті компьютерде шешу**. Есепті шешу үшін барлық қажетті ақпарат программамен бірге компьютердің жадына енгізіледі. Лайықты программаны пайдаланып, мақсаттық ақпарат өңделеді және ыңғайлы формада есеп шешімінің нәтижелері алынады.

8 **Модель адекваттылығын тексеру (модельді верификациялау).**

9 **Пайда болатын шешімді талдау**. Шешімді талдаудың екі түрі бар: формальды (математикалық), алынған шешімнің құрылған математикалық модельге сәйкестігі тексеріледі (сәйкестік болмаған жағдайда программа, бастапқы деректер, ЭЕМ жұмысы және с.с. тексеріледі) және мазмұндық (экономикалық, технологиялық және басқалар), алынған шешімнің модельденген объектке сәйкестігі тексеріледі. Мұндай талдаудың нәтижесінде модельге өзгерістер немесе дәлдіктеулер енгізіліуі мүмкін, одан кейін бүкіл қарастырылған үрдіс қайталанады. Егер модель таңдап алынған критерий бойынша

объекттің тіршілігін жеткілікті дәлділікпен сипаттайтын болса модель құрылған және аяқталған деп саналады. Тек осыдан кейін ғана модельді есептеулерде пайдалануға болады.

Техникалық жүйелерді математикалық модельдеу келесі әдістерді пайдалануды көздейді:

1. аналитикалық;
2. сандық;
3. статистикалық (имитациялық);
4. аналитика-имитациялық.

Нақтылы модельдеу әдісін таңдау көптеген факторларға тәуелді, оның ішінде:

– модельдеу мақсаттарына;
– зерттелетін жүйенің күрделілігіне;
– таңдалған оны бөлшектеу деңгейімен анықталатын модельдің күрделілігіне;
– зерттелетін сипаттамалардың номенклатурасына қойылатын талаптарға;
– алынатын нәтижелердің дәлділігіне қойылатын талаптарға;
– алынатын нәтижелердің жалпыламалығна қойылатын талаптарға;
– модельдеуге жұмсалатын уақыт шығындарына қойылатын талаптарға;
– материальдық шығындарға қойылатын талаптарға;
– модельдеуді орындау үшін арнайы техникалық құралдардың бар болуына;
– модельдеуді жүргізетін маманның біліктілігіне жне с.с.

Модельдеу әдістерін сапалы деңгейде жасалған салыстырмалы талдау нәтижелері 10.1 кестеде келтірілген (фигуралық жақшалармен әр көрсеткіштің ең жақсы мәндері белгіленген).

Кесте 10.1 Модельдеу әдістерін салыстырмалы талдау нәтижелері

Модельдеу әдісі	Әдістің күрделілігі	Нәтижелердің жалпыламалығы	Нәтижелердің дәлділігі	Уақыт шығындары	Материал шығындары	Синтездеу есептері
Аналитикалық	{+}	{++++}	+	{+}	{+}	{+}
Сандық	++	+++	++	++	++	++
Имитациялық	+++	+	{++++}	++++	++++	++++
Комбинирленген	++++	++	+++	+++	+++	+++

Математикалық модельдеу есептерін шешу үшін бастапқы ақпарат қажет. Оны шартты түрде екі түрге бөледі – априорлы [aprior information] және апостериорлы [aposterior information] ақпарат. Сәйкесінше, бұл кейбір тәжірибе немесе басқа амалдарды орындауға дейін болған деректер, және оларды орындағаннан кейін алынған мәліметтер. Әдетте объект туралы априорлы және ағымдағы ақпараттың толық емес болған және бақыланбайтын түрлі ұйытқулар орын алған жағдайларда жұмыс істеуге мәжбұр болады.

Егер объект «қара щәщік» ретінде қарастырылатын болса, онда әдетте тек апостериорлы ақпаратты пайдаланады.

«Қара щәщік» - берілген есептің аумағында жұмыс жасау механизмі күрделі, белгісіз немесе маңызды емес жүйелерді белгілеу үшін дәл ғылымдарда (системотехника, кибернетика және с.с.) пайдаланылатын термин. Мұндай жүйелер әдетте ақпаратты енгізу үшін бір «кіріске» және жұмыс нәтижелерін бейнелеу үшін бір «шығысқа» ие. Шығыстың күйі әдетте кірістің күйіне тәуелді.

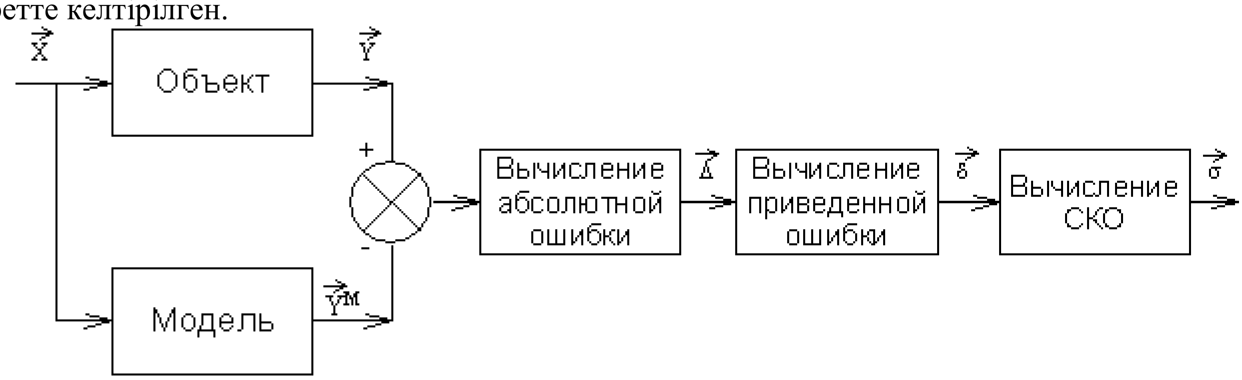
Зерттеу объект туралы априорлы ақпаратты (егер ол қолжетерлік болса) пайдалану көп жағдайларда идентификаттау пробеманы шешуді жеңілдетеді.

Идентификаттау сапасының критерийлері мен көрсеткіштері. Модельдің нақтылы объектке адекваттылығын сипаттайтын сапа критерийін қалыптастыру идентификаттаудың негізгі кезеңдерінің бірі болып табылады.

Адекваттылық объекттің берілген зерттеу мақсаттары үшін маңызды болатын барлық қасиеттерін қажетті толықтылықпен модель арқылы ұдайы өндіруді көздейді.

Мөлшерлік (сандық) түрде модель мен объекттің адекваттылық дәрежесін объект пен оның моделіне бірдей кіріс әсерлерді берген кезде олардың шығыс сигналдарын салыстыру арқылы бағалауға болады.

Статикалық объект моделінің қатесінің бағасын есептеудің құрылымдық схемасы 10.1 суретте келтірілген.



Сурет 10.1 - Модель қатесінің бағасын есептеудің құрылымдық схемасы

Олардың рұқсат етілген мәндерінің D_z аумағынан кіріс әсерлердің $\vec{x}_j = (x_{1j}, x_{2j},...,x_{nj})$ түрлі деңгейлерінде l тәжірибелер өткізіліп, объект шығыстарының $\vec{y}_j = (y_{1j}, y_{2j},...,y_{nj})$ жүзеге асырулары және модель шығыстары $\vec{y}_j^{\,M} = (y_{1j}^M, y_{2j}^M,..., y_{nj}^M)$, $(j = \overline{1,l})$ алынған болсын.

Оның адекваттылығын бағалау үшін модель қателері $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2,..., \Delta_m)$ және $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2,..., \delta_m)$ келесі формулалар бойынша есептеледі:

$$\Delta_i = \max_{j=1,i} \left| y_{ij} - y_{ij}^M \right|, \quad (i = \overline{1,m});$$

$$\delta_i = \frac{\Delta_i}{\Delta y_i}, \quad (i = \overline{1,m});$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}(y_{ij} - y_{ij}^M)^2}, \quad (i = \overline{1,m});$$

мұнда: $\Delta_i, \delta_i, \sigma_i$ - модельдің і-ші шығысы $(i = \overline{1,m})$ бойынша абсолюттік, келтірілген және орташа квадратты қателері; y_{ij}, y_{ij}^M - объект пен модельдің j-ші тәжірибедегі і-ші шығысының мәні $(i = \overline{1,m}),\ j = \overline{1,l})$; Δy_i - D_x аумағынан x_k $(k = \overline{1,n})$ кірістердің рұқсат етілген мәндерінде объекттің і-ші шығысының $(i = \overline{1,m})$ максимальды өзгеруі.

Егер бұл қателердің шамалары кейбір берілген оңтаңбалы саннан кіші болса, онда модель объектке адекватты.

Енді динамикалық объект моделінің бағасын қарастырайық. Идентификаттаудан кейін бірөлшемді объекттің келесі сызықты дифференциальды теңдеу түріндегі моделі алынған болсын:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_M(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x_M(t)}{dt^k}, \qquad (10.1)$$

мұнда: $x_M(t)$ – модельдің кіріс сигналы; $y_M(t)$ – модельдің шығыс сигналы; n, m – сәйкесінше $y_M(t)$ және $x_M(t)$ туындылардың ең жоғары реттері ($m \le n$).

Уақыттың $t \in [0,T]$ кесіндісінде объекттің $x_M(t)$ кірісінің және $y_M(t)$ шығысының жүзеге асырулары алынған болсын, мұндағы Т - жүзеге асыру ұзындығы (бақылау уақыты). Енді модельдің сапасын тікелей графикте немесе осы сигналдар арасындағы ара-қашықтықтың кейбір формальды өлшемін енгізіп $y_M(t)$ мен $y_M(t)$ салыстыру арқылы бағалауға болады.

Кіріс сигналдары бірдей болса да объект пен модельдің шығыс сигналдарының айырмашылықтары бар, себебі олардың дифференциальды теңдеулері мен бастапқы күйлері бірдей емес. Модель мен объекттің адекваттылығын бағалау үшін шығыс сигналдарының айырмашылықтары бойынша олардың жақындық критерийін енгізейік, яғни, бірдей бір кіріс x(t) сигналға қайтаратын реакциялары:

$$I_x = \int_0^T F(y(t) - y_M(t))dt \qquad (10.2)$$

мұнда: F(*)- дөңес функция.

Жеке жағдайда:

$$F(y(t) - y_M(t)) = (y(t) - y_M(t))^2 \qquad (10.3)$$

Жалпы жағдайда адекваттылықты бағалау кіріс x(t) сигналдың әртүрлі формалары үшін жүргізіледі. Осыдан кіріс сигналдар және бастапқы шарттар бойынша орташалау қажеттілігі туралы идея шыққан, яғни I_x бағаның математикалық күтім операциясын енгізу:

$$I = M[I_x] = M\left[\int_0^T F(y(t) - y_M(t))dt\right] \qquad (10.4)$$

Шығыс сигнал өрнегінің түрі күрделі болғандықтан ол I-дің модель коэффициенттеріне тәуелділігін аналитикалық зерттеуді қиындатады, сондықтан басқа да критерийлер енгізіледі. Жеке жағдайда есгер модель теңдеуінің түрі келесідей болса:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_M(t)}{dt^k} = x_M(t), \qquad (10.5)$$

онда модель мен объекттің жақындығын бағалау үшін $y_M(t)=y(t)$ шарты сақталғанда бірдей бір шығыс сигналды қамтамасыз ететін модель мен объекттің кіріс сигналдарының айырымынан ($x_M(t)$–x(t)) функционал ыңғайлы:

$$I = M\left[\int_0^T F(x_M(t) - x(t))dt\right] \qquad (10.6)$$

Бұл жағдайда модель мен объекттің шығыс сигналын y(t) деп белгілейміз. Онда (10.5)-ті (10.6)-ға қойып, келесіге ие боламыз:

$$I = M\left[\int_0^T F\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - x(t)\right)dt\right] \qquad (10.7)$$

демек, функционал модельдің коэффициенттеріне айқын түрде тәуелді, ол аналитикалық зерттеу үшін ыңғайлы.

Осы идеяны дамытып, модельдің жалпы (10.1) түрі үшін ыңғайлы функционалды тұжырымдауға болады:

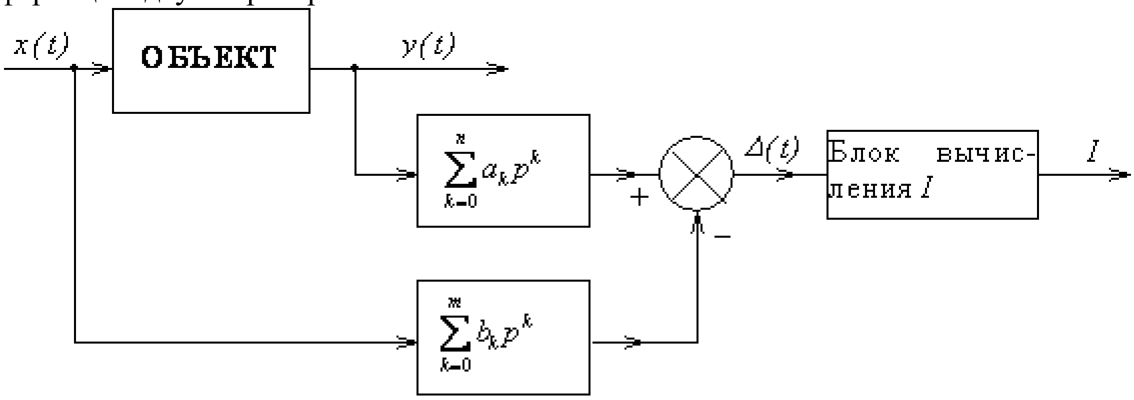
$$I = M\left[\int_0^T F\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right)dt\right] \tag{10.8}$$

$$\Delta = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{10.9}$$

өрнек модельдің жалпылама қатесі деп аталады. F(*) функция ретінде, әдетте, жалпылама қатенің квадратын қабылдайды:

$$I = M\left[\int_0^T \Delta^2(t)dt\right] \tag{10.10}$$

Бұл функционалдың ыңғайлығы – ол модельдің параметрлеріне және объекттің өлшеуге қолжетерлік кіріс және шығыс сигналдарына айқын түрде тәуелді. Бырақ, бұл функционалды есептеу барысында x(t) және y(t) сигналдарды дифференциалдауға және, сонымен қатар, математикалық күтім операциясын орындау қажеттілігіне байланысты қиындықтар пайда боладыыов объекта. Жалпылама қатені және I критерий бағасын есептеудің құрылымдық схемасы 10.2 суретте бейнеленген, ондағы $p = \frac{d}{dt}$ - дифференциалдау операторы.



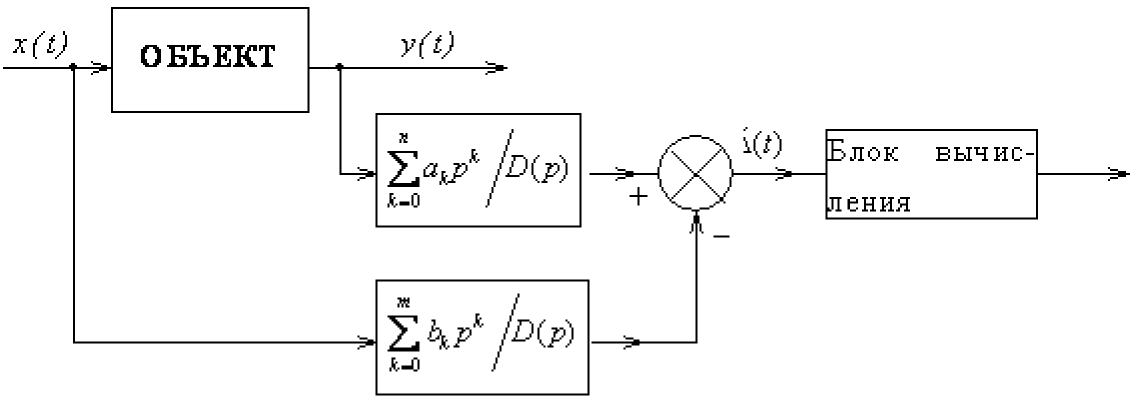
Сурет 10.2 – Жалпылама қатені және I критерий бағасын есептеудің құрылымдық схемасы

Бырақ, физикалық жүзеге асырылу шарттары бойынша олардың алымының реті бөлімінің ретінен кіші (немесе тең) болатын құрылғыларды ғана құруға болады, яғни, операторлары келесідей болатын құрылғыларды жүзеге асыруға болады:

$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k / D(p)$ және $\sum_{k=0}^{m} b_k p^k / D(p)$

мұнда: D(p) – дәрежесі n-нен үлкен немесе тең көпмүше; $m \le n$.

Онда жалпылама $\tilde{\Delta}(t)$ қатені және $\tilde{I}$ критерий бағасын есептеудің құрылымдық схемасы 10.3 суретте бейнеленген түрге ие болады.

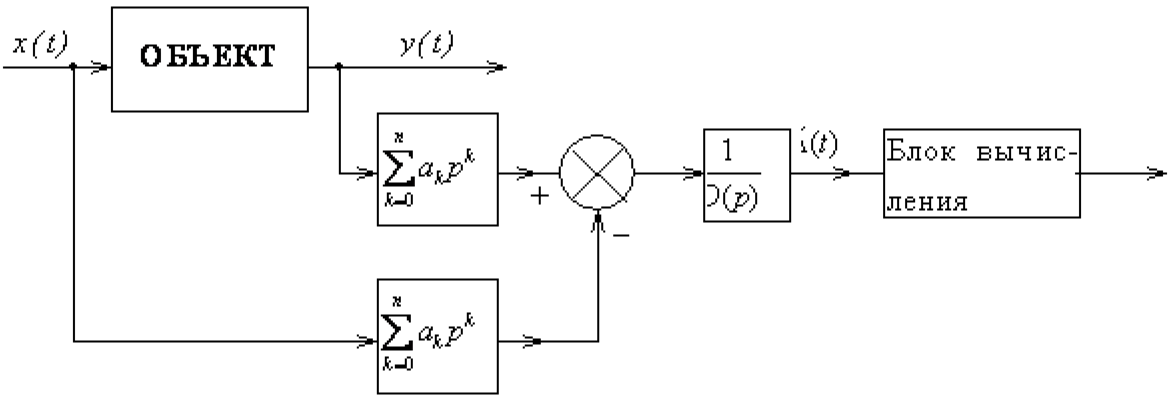


Сурет 10.3 – Жалпылама қатені есептеудің құрылымды схемасы

$$\tilde{\Delta}(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k p^k / D(p)\right) y(t) - \left(\sum_{k=0}^{m} b_k p^k / D(p)\right) x(t) \qquad (10.11)$$

$$\tilde{I} = M\left[\int_0^T \tilde{\Delta}^2(t)dt\right] \qquad (10.12)$$

10.3 суретте бейнеленген құрылымды схемаға 10.4 суретте келтірілген схема эквивалентті.



Сурет 10.4 – Жалпылама қатені есептеудің эквиваленттік құрылымды схемасы

Сонымен, физикалық түрде жүзеге асырылатын құрылғылар көмегімен өлшенетін жалпылама $\tilde{\Delta}(t)$ қатенің жалпылама $\Delta(t)$ қатеден айырмашылығы келесіде: $\tilde{\Delta}(t)$- беріліс функциясы 1/D(p) фильтрмен $\Delta(t)$-ны түрлендірудің нәтижесі болып табылады. Осы фильтрдің өткізу жолағының ақырлы болғанына байланысты жалпылама қате сигналының бұрмалануы орын алады. Фильтрдің өткізу жолағыны үлкейген сайын бұл бұрмаланулар азая береді.

Егер модельдің қателіктер шамасы мен жуықтау критерийлер бағаларының шамасы модельдің сапасына қойылатын талаптарды қанағаттандыратын болса, онда модель объектке адекватты болып саналады да, оны модельдеу, оптимизациялау және басқару мәселелерін шешу үшін пайдалануға болады. Кері жағдайда құрылым өзгерту және оған ескерілмеген факторларды енгізу арқылы модельді жетілдіру керек.

Құрылымдық және параметрлік идентификаттау. Модельдеу (кең мағынада) инженерлік тіршіліктің түрлі салаларында шешім қабылдау үшін пайдаланылатын, күрделі жүйелердің сипаттамаларын бағалаудың ғылыми негізделген әдісі және білімнің барлық салаларында зерттеулердің негізгі әдісі болып табылады.

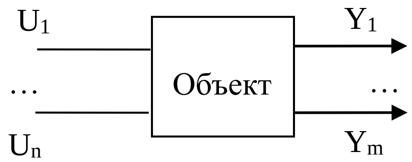
Модельдеу проблемасын тұтасымен сипаттай отырып, модельдеу есебін қоюдан бастап алынған нәтижелерді интерпретациялауға дейін күрделі ғылыми-техникалық поблемалардың үлкен тобы бар екендігін ескеру керек. Олардың негізгілерінің қатарына келсілерді жатқызуға болады: нақтылы объекттерді идентификаттау; модельдердің түрін таңдау; модельдерді құру және оларды машиналық жүзеге асыру; машиналық эксперимент барысында зерттеушінің модельмен өзара әрекеттесуі; модельдеу барысында алынған нәтижелердің дұрыстығын тексеру; модельдеу барысында зерттелген негізгі тәуелділіктерді анықтау. Модельдеу объектісіне және пайдаланылатын модель түріне тәуелді бұл проблемалардың мағыналығы әртүрлі болуы мүмкін.

Идентификаттау деп объекттің кіріс және шығыс айнымалыларын бақылау нәтижелері бойынша құрылған, жүйенің кіріс (U) және шығыс (Y немесе X) параметрлерінің функциясы болып табылатын объекттің белгілі бір мағынада оптимальды Am моделін (немесе F оператордың бағасын) табуды айтады.

Алынған модель, (ол зерттелетін объектке адекватты болған жағдайда) негізінде, басқару, болжау, құрастыру, оптимальды режимдер мен шарттарды іздеу, құбылыстар мен құрылғыларды имитациялау және с.с. есептерде нақтылы объектті алмастыру үшін арналған.

Идентификаттау есебі деп жүйелік синтездеудің **кері** есебі аталады.

$$A_m = f(U, Y)$$



Сурет 10.2 – Идентификаттау есебі

Идентификаттау есептерінің арасында екі түрін (проблемаларды) ерекшелейді:

1. **құрылымдық** идентификаттау (сөздің кең мағынасында);
2. **параметрлік** идентификаттау (сөздің тар мағынасында).

Құрылымдық идентификаттау «қара щәшік» типтегі модельді құруды жорамалдайды, яғни, объект туралы ақпарат толығымен немесе жарым-жартылай жоқ. Құрылымдық идентификаттаудың басты есебі – модельдің құрылымын анықтау (сурет 10.5).

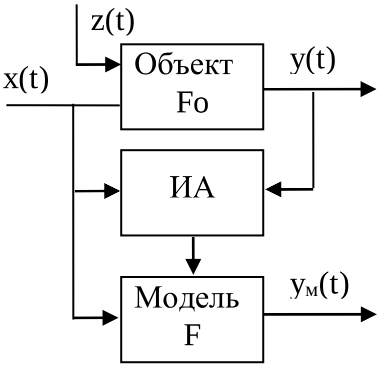
Идентификаттау үрдісін келесі суреттегідей бейнелеуге болады:

Сурет 10.5 – Құрылымдық идентификаттау

Бірінші проблема - **құрылымдық идентификаттау** келесі төрт негізгі кезеңдерден тұратын бүкіл мөдельдеу үрдісінің негізгі проблемасы болып табылады:

- есеп қойылымы
- модель құрылымын таңдау және оның блоктарын математикалық сипаттау;
- модельді зерттеу;
- модельді экспериментальды түрде тексеру.

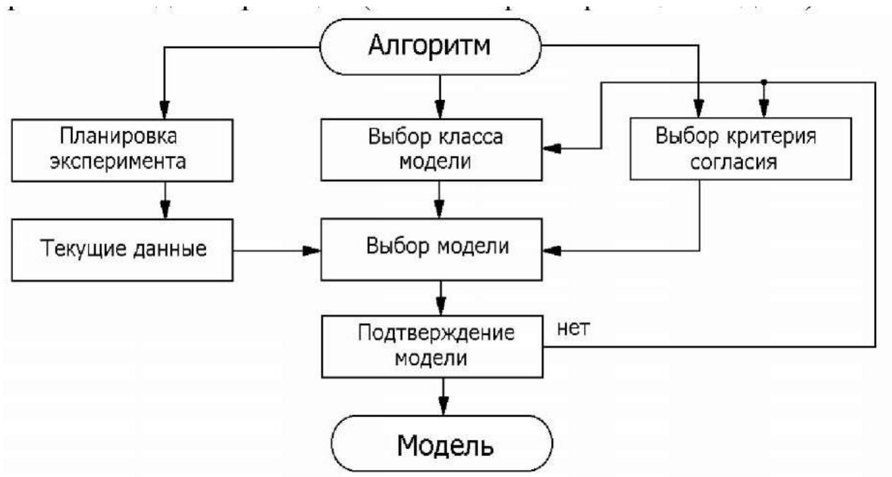
Модельдің құрылымы ол әлі модельдің өзі емес, және оның параметрлерін анықтау үшін өлшеулер қажет. Модельдің берілген құрылымында объект жұмысын бақылау бойынша модельдің параметрлерін анықтау есебін тар мағынада идентификаттау немесе параметрлік идентификаттау деп атайды. Мысалы, кейбір объектті сипаттайтын теңдеулер жүйесі белгілі. Теңдеулердің тек коэффициенттерін ғана анықтау керек. Құрылымдық идентификаттау процедурасы 10.6 суретте көрсетілген.



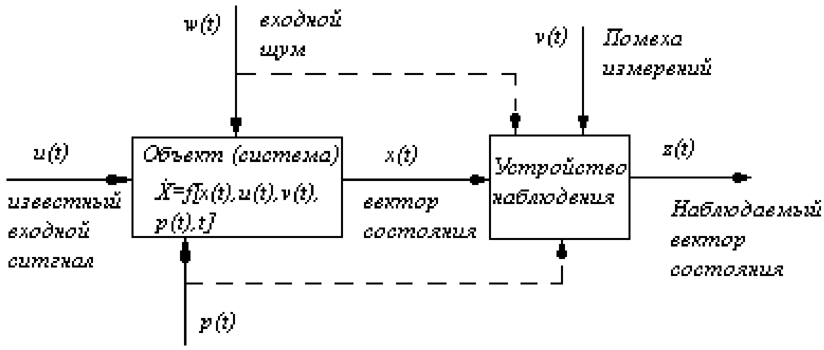
ИА – идентификаттау алгоритмі
Сурет 10.6 – Идентификаттау процедурасы

Екінші проблема (**параметрлік** идентификаттау) модельдің берілген құрылымында формализациялауға болады және ол модельдеудің төртінші кезеңімен түйіседі.

Сонымен, модельдеудің көпкезеңді үрдісіне қатысты жалпы идентификаттау оның жұмыс жасауы туралы экспериментальды деректердің негізінде объект пен модельдің құрылымы немесе параметрлерінің сәйкестігі туралы гипотезаларды тексеру аспабы ретінде қызмет атқарады. Бұл кездегі сәйкессіздік түрі мен дәрежесі модельді корректировкалау бойынша мазмұнды немесе формализацияланған шешімдерді қабылдау үшін пайдаланылады (сурет 10.7 және 10.8).



Сурет 10.7 – Модельді идентификаттаудың жалпы сұлбасы



Сурет 10.8 – Модельді идентификаттаудың құрылымды сұлбасы

Бұл суретте – ағымдық деректер пассив немесе белсенді эксперименттің нәтижесінде алынуы мүмкін. Пассив экспериментте – зерттеуші деректерді тіркеу (өзгерту) процедурасына әсерін тигізбейді. Белсенді экспериментте – зерттеуші эксперимент жоспарын қалыптастырады.

Модельдерді құру негізінде бақылау деректерені сүйенеді. Математикалық модельдерді қалыптастырудың екі тәсілі (және комбинациялары) бар.

Бірінші тәсілде зерттелетін жүйе қасиеттері бұрыннын жинақталған тәжірибеден белгілі болатын ішкі жүйелерге жіктеледі. Осы ішкі жүйелерді формальды математикалық біріктіру бүкіл жүйенің моделі болады. Мұндай тәсіл модельдеу немесе модельдерді құрудың аналитикалық әдісі деп аталады. Бұл жағдайда табиғи экспериментті қою міндетті емес. Негізгі тәсіл үрдісті блоктары қарапайымдау элементтерден тұратын блок-схема түрінде құрылымдауға келтіріледі. Осы қарапайым блоктар бойынша жүйені қалпына келтіру әдетте ЭЕМ көмегімен орындалады да, жүенің математикалық емес машиналық моделіне әкеледі.

Модельдерді құрудың екінші тәсілінде экспериментальды деректер тікелей пайдаланылады. Бұл жағдайда жүйенің кіріс және шығыс сигналдары тіркеледі және сәйкес деректерді өңдеу нәтижесінде модель қалыптастырылады. Бұл тәсіл идентификаттау деп аталады.

Сонымен, идентификаттау есебі келесідей тұжырымдалады: объекттің кіріс және шығыс айнымалыларын бақылау нәтижелері бойынша оның белгілі бір мағынада оптимальды моделін құру. Бұл кезде объект жұмыс жасауының қалыпты режимінде болады (яғни, кездейсоқ ұйытқулар мен бөгеуілдер әсер тигізеді). Басқа сөзбен айтқанда, егер объект кейбір белгісіз F_0 оператормен сипатталатын болса, онда кіріс пен шығыстың өлшенген мәндерге ие бола отырып, объекттің F операторының кейбір критерий мағынасында оптимальды болатын бағасын құру керек.

Сурет 10.9 – Идентификатталатын объекттің қоршаған ортамен өзара әрекеттесуі

10.9 суретте идентификатталатын объекттің қоршаған ортамен өзара әрекеттесуі көрсетілген. Бұл өзара әрекеттесу U және Y арналары бойынша орындалады. U – кіріс арнасы бойынша қоршаған орта объектке әсерін тигізеді, ал Y (шығыс) арна бойынша объект қоршаған ортаға әсерін тигізеді. Идентификаттау есебі объекттің кірісі мен шығысын байланыстыратын модельдің F операторын анықтауға келтіріледі: Y = F(U).

Идентификаттау әдістерін классификациялау. Қазіргі замағы теорияға сәйкес идентификаттаудың келесі классификациясын ұсынуға болады:

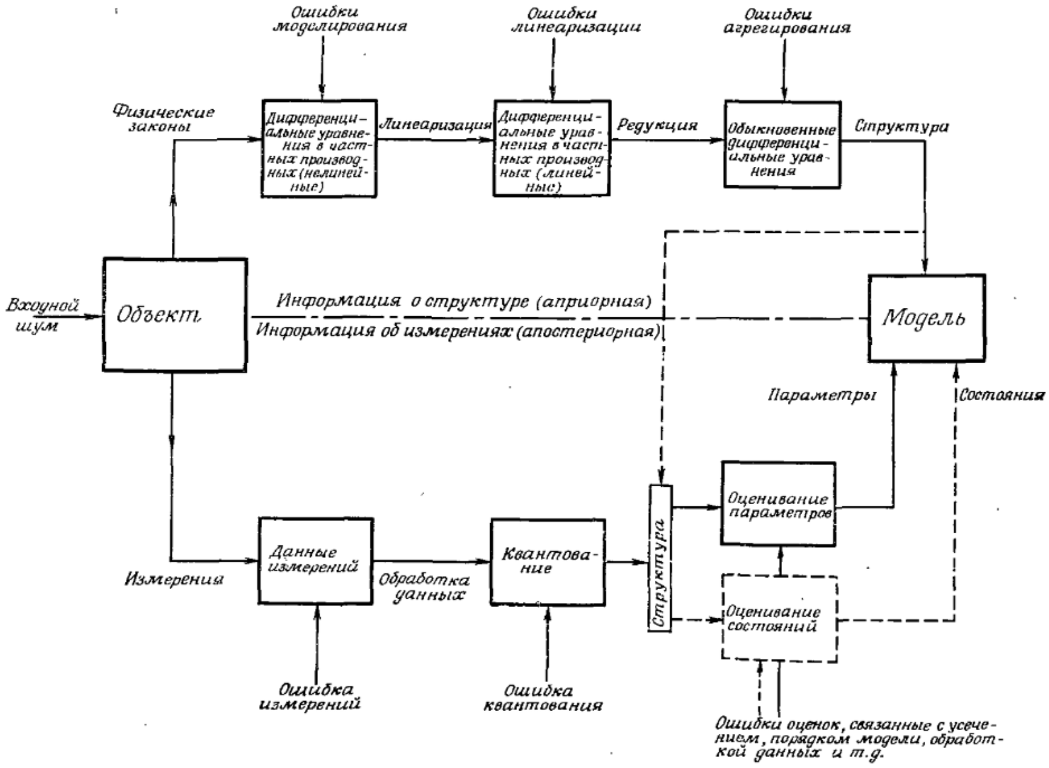
1) идентификаттаудың қорытынды нәтижесі бойынша (құрылымдық және параметрлік);

2) идентификаттау объектісін зерттеу тәсілі бойынша (белсенді және пассивті)

3) идентификатталатын модельдің типі бойынша (сызықты және бейсызықты; детерминді және стохастикалық; үздіксіз және дискретті уақытты; стационарлы және бейстационарлы; бірөлшемді және көпөлшемді; статикалық және динамикалық; параметрлері жинақты және таралған).

Белсенді және пассивті идентификаттау. Объектті идентификаттау сәттілігі екі факторлардың қатынасына тәуелді: объекттің құрылымы туралы априорлы ақпараттың көлемі және өлшенген ақпарат көлемі. Априорлық мәліметтер модельдің құрылымын, яғни оның түрін (кірістер мен шығыстар санын, олардың арасындағы байланыстар түрін) анықтауға жәрдемдеседі. Идентификаттаудың **белсенді** тәсілінде кірісті жүзеге асыруды зерттеушінің өзі объекттің кірісіне сынақтау сигналдың қолайлы формасын(секірмелі сигнал, импульстік сигнал, гармоникалық, тікбұрышты, трапециялық, үшбұрышыт және с.с. тербелістер түріндегі сигналдарды) беру арқылы қалыптастырады. Объект шығысының жүзеге асырылуы оның сынақтау сигналына қайтаратын реакциясы болып табылады. Бұл кезде идентификаттаудың қазіргі теориясында экспериментті оптимальды жоспарлау әдістері кеңінен пайдаланылады. Идентификаттаудың **пассивті** тәсілінде объекттің кірісі мен шығысының жүзеге асырылуы ретінде объекттің қалыпты жұмыс жасау барысындағы олардың табиғи өзгерулерін қабылдайды.

10.10 суретте модельді құрудағы априорлы ақпарат (құрылым туралы) және өлшеулер туралы апостериорлы ақпарат арасындағы байланыс көрсетілген. Суреттің жоғарғы бөлігі ары-қаарй сықтандырып және кәдімгі дифференциальды теңдеулерге түрлендіріп физикалық заңдарды пайдаланудың нақтылы мысалы ретінде модельді құру үрдісін бейнелейді. Пайда болатын теңдеулер модельдің құрылымын анықтайды. Әр қадамда қателер пайда болады. Суреттің төменгі бөлігінде өлшеулерге негізделген және деректерді өңдеуді және бағалау алгоритмдерін қамтитын бағалау процедурасы бейнеленген. Мұнда да қателердің әртүрлі түрлерін ескеру керек.



Сурет 10.10 - Априорлы ақпарат (құрылым туралы) және өлшеулер туралы апостериорлы ақпарат арасындағы байланыс

Бақылау сұрақтары

1 Сәйкестендіру кезеңдері;
2 Сәйкестендіру сапасының өлшемдері мен көрсеткіштері;
3 Құрылымдық және параметрлік сәйкестендіру;
4 Белсенді және пассивті сәйкестендіру.

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

11 лекция Идентификациялану проблемасы

Мақсаты: лекцияда идентификациялану проблемасы; ажыратылған жүйелердегі идентификацияланудың жүйелік шарттары; тұйықталган сызықты жүйелердегі идентификацияланудың жүйелік шарттары; ықтималдық идентификациялану ұғымы қарастыру.

Тезистер

Сызықты динамикалық жүйелердің идентификациялану шарттары.

Кәдімгі сызықты дифференциальды теңдеулер жүйесі түрінде берілген математикалық модельдің параметрлерін идентификаттау есебін қарастырайық:

$$\dot{x} = Ax\,.$$

Жүйенің күйі n- өлшемді эвклидтік кеңістіктің x(t) векторымен берілген және өлшеулер арқылы келесі векторлар белгілі:

$$x(t), \dot{x}(t), \dot{x}, \ddot{x}, ..., \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \qquad (11.1)$$

Есептің мағынасы – келесі шарттар орындалатын болатындай A матрицаны табу:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax \\ &\ddot{x} = A\dot{x} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^n x}{dt^n} = A\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Жүйенің белгілі (11.1) векторлармен берілген күйі идентификацияланады дейміз, егер ол үшін (11.2) теңдіктерді қанағаттандыратын A матрица бар болатын болса.

A матрицаның әр $a_j^{\tau} = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})$ қатары үшін (11.2) теңдеулер жүйесін жазу қиын емес:

$$\begin{bmatrix} x^{\tau} \\ \dot{x}^{\tau} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^{\tau}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix} \quad j = 1,2,..., n \text{ үшін} \qquad (11.3)$$

Идентификаттау есебі, яғни (11.3) жүйе шешімінің бар болу шартын келесі түрде жазуға болады:

$$\det(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \neq 0 \qquad (11.4)$$

(11.3) қатынастардан модельдің параметрлерін келесі формулалар бойынша анықтауға болады:

$$a_j = \begin{bmatrix} x^{\tau} \\ \dot{x}^{\tau} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^{\tau}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}; \quad j = 1,2,...,n \text{ үшін} \qquad (11.5)$$

(11.2) қатынасты (11.4) шартқа қойып, келесі теңсіздікті аламыз:

$$\det(x, Ax, \ldots, An\text{-}1x) \neq 0 \qquad (11.6)$$

Идентификациялану және басқарылу есептер арасында байланыс бар екендігін көрсетейік. Бұл байланыс келесідей тұжырымдалады:

- $\dot{x} = Ax$ математикалық модель түрінде идентификаттау есеп шешімі болуы үшін
- x(t) күйлер векторын бақылауда A матрица мен x(t) вектор әбден басқарылу шарттарын қанағаттандырғаны жеткілікті:

det (b, Ab, ... , An-1b) ≠0:   мұнда: b = x(t).

A матрица алдын-ала белгісіз болғандықтан, тәжірибеде идентификаттау шарттарын (11.4) шарттардың негізінде тексереді.

Дискретті сызықты басқару жүйелері үшін идентификациялануды анықтау келесідей тұжырымдалады: егер n-ші ретті дискретті сызықты стационарлы жүйенің x(k), x(k+1), ... , x(k+n) күйлерінің векторының белгілі мәндері бойынша:

$$x(k+1) = Ax(k)$$

A матрицаны бастапқы күйіне қайта келтіру мүмкін болса, онда жүйені идентификацияланатын жүйе деп атайды.

Теорема. Дискретті сызықты жүйені идентификаттау есебі шемімге ие болады, егер:

$$\det(x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n-1)) \neq 0$$

Ықтималдық идентификациялану түсінігі.

Автономдық жүйелердің идентификациялануы. Сызықты автономды динамикалық жүйе моделінің түрі:

$$dx/dt = Ax,$$

мұнда; x – күйлер вектора (R^n кеңістігі), $x_0=x(0)$.

Анықтамасы. Сызықты автономды динамикалық жүйе күйі бойынша толық идентификацияланатын жүйе деп аталады егер бастапқы шарттардың берілген x_0 векторында оның параметрлер A матрицасы уақыттық x=x(t) тізбектілік бойынша бірмәнді түрде қалпына келтірілуі мүмкін болса.

Әйтпесе, тек x=x(t) интегральды қисықтың ортақтылығымен бірлескен жұптар жиыны нүктеге азғындаған жағдайда ғана, калман дәстүріне сәйкес, (A,x_0) жұбы толығымен идентификацияланады. Кері жағдайда көрсетілген жұп идентификацияланбайды. Төменде келтірілген идентификациялану критерий басқарылу мен бақылану критерийлерді еске салады.

Теорема 1. (A,x_0) жұптың толығымен идентификациялануының қажетті және жетерлік шарты келесіде:

$$\mathrm{rank}[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ \ldots\ A^{n-1}x_0] = n,$$

мұнда: n – жүйенің реті. Квадрат жақшаларға алынған матрицаны идентификациялану матрицасы деп атаймыз және W белгілейміз.

Дәлелдеме. Матрицалық экспонентаны $e^{At}={}_0\sum^{m-1}\alpha_k(t)A^k$ қосылмалардың ақырлы қосындысына жіктеуге негізделеді. Мұнда: m – минимальды жоюшы A полиномның дәрежесі, $\alpha_k(t)$ – A спектрде анықталған, экспоненциальды функция үшін Лагранж-Сильвестр интерполяциялы полиномның коэффициенттері.

Интегральды қисықтың ортақтылығымен бірлескен (A,x_0) және (B,x_0) жұптардың үрдістерінің туындылары да тең, яғни, $Ax(t)=Bx(t)$, мұнда: $x(t)=e^{At}x_0$. $\alpha_k(t)$ функциялар уақыттың кез-келген аралығында өзара сызықты тәуелсіз, ол келесі матрицалық теңдеуге өтуге мүмкіндік береді:

$$(A-B)[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ ...\ A^{m-1}x_0]=0.$$

A матрица өзінің минимальды жоюшы полиномының түбірі болып табылады, m-нен жоғары болатын оның кез-келген дәрежесі алдыңғылары арқылы өрнектеледі, сондықтан оңжақты матрицаның рангі W идентификациялану матрицаның рангісіне тең. Идентификациялану матрицаның рангісі толық болғанда ғана мүмкін болатын шешімдер жиыны B=A нүктеге түйіседі. Дәлелдеме аяқталды.

Дискретті жүйелер. Үздіксіз жүйелердің идентификациялануы Ли қарастырған дискретті жүйелердің идентификациялану сұрағына келтірілмейді. Үздіксіз жүйенің матрицасын дискретизациялау нәтижесінде пайда болатын жүйенің матрицасы бойынша бірмәнді бастапқы қалпына келтіру мүмкін емес: A-ны e^{AL} және L мәндері бойынша. Сонымен қатар, үздіксіз және дискретті жүйелерге сәйкес идентификациялану критерийлерін тексеру бірдей нәтиже береді, себебі W-дегі A-ны кез-келген L үшін e^{AL} матрицалық экспонентамен (яғни, дискреттік жүйенің матрицасымен) алмастыру оның рангісіне әсер тигізбейді. Идентификаттау үшін деректерді сұрыптауды құрудың жеке (біркелкі) тәсілінде жүйенің параметрлерін табу мүмкін болмағанда да идентификациялану критерийін тексеруге болады.

Идентификациялану – ол жүйенің параметрлерін бастапқы қалпына келтіру әдістің емес, жүйенің қасиеті. Бұл басқарылу және бақылану сияқты жүйелік қасиет. Бір жұмыс жасауға қабілетті реттегішті немесе бақылау құрылғысын құру мүмкін еместік басқасын да құруға мүмкін еместігін білдірмейді. Бырақ басқарылмайтын және бақыланбайтын жүйелер үшін олардың калман тұжырымдамасында басқару және бақылау есептерін шешу мүмкін емес. Дәл осы идентификаторларды құруға да қатысты. Теориялық тұрғыда шешілетін жағдайда сұрыптауды құру тәсілін өзгерту немесе туындыларын өлшеу керек.

Автономды емес жүйелердің идентификациялануы. Күйлер кеңістігіндегі жүйелердің теңдеулерінің жалпы сипатталуларын қамтымастан біздің қарастыруымыз толық болмайды, ал олар келесідей:

$$dx/dt=Ax+bu,\ y=cx(t),$$

мұнда: x – бұрынғыдай күйлер векторы (R^n кеңістігі), $x_0=x(0)$.

Анықтамасы. Сызықты динамикалық жүйе күйі бойынша толық идентификацияланатын жүйе деп аталады, егер $x=x(t)$ уақыттық тізбектілік бойынша оның кан811икалық (бақылану) формасын параметрлеріне дейінгі дәлдікпен A,b,c параметрлерін бастапқы қалпына келтіруге болатын бастапқы x_0 шарттардың берілген векторында басқару болса.

Әйтпесе, интегральды $x=x(t)$ қисықтың ортақтылығымен бірлескен жұптар жиынын канондикалық сипаттағанда нүктеге өзгешеленетін басқару болса ғана $((A,b,c),x_0)$ жұп толығымен идентификацияланады.

Теорема 2. $((A,b,c),x_0)$ жұптың толығымен идентификациялануының қажетті және жеткілікті шарты келесіде:

$$\mathrm{rank}[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ ...\ A^{n-1}x_0\ b\ Ab\ A^2b\ ...\ A^{n-1}b] = n,$$

мұнда: n – жүйенің реті. Бұл жағдайда жүйенің бақыланылуы жорамалданады, сондықтан басқаша жазуға болады: Rank W_o=n, Rank [W W_c]=n.

Дәлелдеме. Басқарылу матрицаның бақылану матрицасына қатысты ассиметриялы түрде идентификациялану критерийіне кіруінің себебі идентификаттау қажеттілігі үшін басқарылу және бақылану проблемалардың мағынасы әртүрлі болуына байланысты. Бақыланбайтын жүйелер параметрлерін бастапқы күйге келтіру мүмкін болмайтын бөліктерді қамтиды, сондықтан бақылану критерийі жеке, алдын-ала шарт ретінде жазылады. Бақыланудың каноникалық формасы күйінің векторын жүйенің параметрлерін білместен бастапқы қалпына келтіруге болады, мысалы, импульстік әсерде. Калманның дуальділік принципін кеңейтіліп түсіндіру (A,b) жұбы бар жүйенің басқарылу проблемасын (A,b) жұптың идентификациялану проблемасына келтіреді, себебі импульстік сигнал жүйені b күйге өткізеді. Бастапқы күй мен идентификаттау уақыты өткеннен кейін импульстік сигнал жүйені өткізетін күйлердің әсерлерінің аддитивті болуы үрдістің автономды жағдайда ұқсас, бырақ көрсетілген құрама матрицамен амал жасайтын бірнеше іске қосылулары бойынша жүйелерді идентификаттаудың жалпы теңдеулерін қарастыруға мүмкіндік береді. Дәлелдеме аяқталды.

Егер кез-келген басқаруда күйлер векторы тікелей өлшеуге қолжетерлік болса, яғни, шығыстың теңдеуі жоқ болған жағдайда Rank [W W_c]=n шарты орындалғанда ((A,b),x_0) жұптың барлық параметрлеріне дейінгі дәлдікпен идентификациялануы туралы айтуға болады. Автономды жүйелерде: Rank W=n.

Бейстационарлы жүйелер. Егер бейстационарлық сипаты белгісіз болса, бестационарлы сызықты динамикалық жүйенің параметрлерін бастапқы қалпына келтіру мүмкін емес, себебі үрдістің бір нүктесі бойынша теңдеулер шешілмейді. Бұл жағдайда басқарылу мен бақылану грамиандарына ұқсас идентификациялану грамианның мағынасына көрсеткен дұрыс. Стационарлы жағдайда бәрі айқын – грамианды немесе жүйелік матрицаны тексеру бәрі бір. //Грамиан – элементтері векторлардың пар-парымен скалярлы көбейтіндісі болатын матрица//

Квазиидентификациялану бейстационарлы және стационарлы жүйелердің параметрлерінің жақын болуына тіпті кепілдік бермейді. Ол бастапқы қалпына келудің жалғыз болуына кепілдік береді.

Қорытынды.

Басқарылу. Бақылану ұғымы және оған дуальды басқарылу ұғымын алғашқы 1960 ж. Калман енгізген. Идентификаттау әдістерін талқылауда бақылану ұғымы басқарылу ұғымына қарағанда маңыздылау болса да, олардың дуальды болу себебіне байланысты бірге қарастырылады.

Жүйе басқарылатын жүйе болып табылады дейді егер құрама-үздіксіз кіріс әсерді тигізу арқылы уақыттың ақырлы τ ($\tau = t_i — t_o$) аралығында жүйе t=to -дағы кез-келген x(t_o) күйінен кез-келген басқа қажетті $x(t_i)$ күйге өткізілуі мүмкін болса.

Жүйе басқарылмайтын жүйе болып табылады, егер басқарушы кіріс u(t) әсер күйдін кейбір айнымалыларына әсерін тигізе алмайтын болса.

Сонымен қатар, басқарылатын тұйық сызықты жүйе сәйкес тұйық емес жүйенің өзіндік мәндеріне тәуелсіз еркін өзіндік мәндерге ие бола алады.

Әдебиетте жүйелердің басқарылуын (сәйкесінше бақыланылуын) талдау критерийлері сипатталған. Олардың барлығы күйдің каноникалық теңдеуін қарастыруға және полиномиальды $e^{м}$ жіктеуге негізделген.

Бақыланылу. Бақыланылу ұғымы басқарылу ұғымын толықтырады. Егер басқарылу жүйенің әр күйі кіріс сигналдың әсеріне сезімтал болуын талап ететін болса, бақылану жүйенің әр күйі өлшенетін шығыс сигналға әсер тигізуін талап етеді.

Жүйе бақыланады, егер оның барлық күйлерін жүйенің шығыс векторы бойынша тікелей немесе жанама анықтауға болатын болса. Сондықтан, шығыс сигнал векторының белгілі бір күйге әсерінің жоқтығы жүйенің басқарылмайтығын білдерітендей сияқты белгілі бір күй (немесе сол күйдің өзгеруі) шығыс векторға әсер тигізбесе жүйе бақыланбайды. Сонымен қатар, бақыланбайтын жүйенің идентификациялануы мүмкін емес.

Бақылау сұрақтары

1 сызықтық динамикалық жүйелерді сәйкестендіру шарттары
2 автономды жүйелерді сәйкестендіру;
3 ықтималдылықты сәйкестендіру ұғымы;
4 бақылау ұғымы және оған қосарлы басқару түсінігі.

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

12 лекция Құрылымдық статистикалық идентификациялау

Мақстаы: құрылымдық статистикалық идентификациялау; байланыс тығыздығының статистикалық критерийлері; модель координаттарының себеп-салдарлық қатынастар бағдарының тәсілдері мен критерийлері; модель құрылымын идентификациялау кезеңіндегі шешімді қабылдаудың статистикалық процедурасын ұйымдастыру қарастырылған.

Тезистер

Параметрлік идентификаттау әдістерін пайдалану алдында модельдің құрылымын анықтау қажет. Бұл идентификаттау теориясының негізгі проблемаларының бірі.

Құрылымдық идентификаттау зерттелетін объекттегі үрдістерді сипаттайтын математикалық модельді таңдауға келтіріледі. Модель құрылымын априорлы таңдаудың формализацияланған процедуралары осы күнге дейін жоқ. Оны келесімен түсіндіруге болады:

1) басқару жүйелерде объектте өтетін үрдістердің ең маңызды жақтарын бейнелейтін математикалық модельдер пайдаланылады. Сондықтан идентификаттау жүйелерінде қара щәщік концепциясы басымды;

2) үрдістердің табиғатын сипаттау үшін физикалық заңдарды пайдалану әрекеті математикалық сипаттауды алу процедурасын едәуір күрделендіруі мүмкін. Сондықтан, математикалық модель құрылымын таңдау орындалмайтын мақсатқа айналуы мүмкін, себебі физикалық заңдарда бейнеленуді таппаған немесе өте күрделі математикалық бейнеленуге ие болатын үрдістерді сипаттау қажет болады.

3) жаңа (жеткіліксіз зерттелген) объекттерді идентификаттау тек қара щәщік концепциясына негізделеді, ал ол өз жағынан, априорлы анықсыздықтың пайда болуына әкеледі.

4) кез-келген нақтылы объект сыртқы ортамен байланысқан, сондықтан модель құрылымын таңдау кезеңінде нақтылы шектеулерді ескеру керек.

Модельдеудің негізгі кезеңдеріндегі құрылымдық идентификаттау.

Бірінші проблема (құрылымдық идентификаттау) 10 лекцияда қарастырылған келесі төрт негізгі кезеңдерден тұратын бүкіл мөдельдеу үрдісінің негізгі проблемасы болып табылады:

- есеп қойылымы
- модель құрылымын таңдау және оның блоктарын математикалық сипаттау;
- модельді зерттеу;
- модельді экспериментальды түрде тексеру.

Осы проблемамен модельдеудің кемінде алдыңғы үш кезеңі түйіседі. Нақтылы объекттердің үлкен әр түрлілігіне және күрделігіне байланысты бұл проблеманы толық формализациялау мүмкін емес. Мұнда зерттеушінің кәсіби шеберлігінің, үрдістердің физикалық механизмін білу, мақсатты дұрыс тұжырымдау және есеп қойылымының рөлі өте үлкен.

Параметрлік идентификаттау. Екінші проблема (параметрлік идентификаттау) модельдің берілген құрылымында формализациялауға болады және ол модельдеудің төртінші кезеңімен түйіседі.

Сонымен, жалпы модельдеудің көпкезеңді үрдісіне қатысты идентификаттау объекттің жұмыс жасау туралы экспериментальды деректер негізінде объект пен модельдің құрылымы немесе параметрлерінің сәйкестігі туралы гипотезаларды тексерудің аспабы ретінде қызмет атқарады. Сәйкессіздіктің сипаты мен дәрежесі бұл кезде модельді корректірлеу бойынша мағыналы немесе формализацияланған шешімдерді қабылдау үшін пайдаланылады. Құрылымдық және параметрлік идентификаттау мәселерін толықтау қарастырайық.

Модель құрылымын идентификаттау кезеңіндегі шешімдерді қабылдаудың статистикалық процедурасын ұйымдастыру.

Құрылымдық идентификаттау кезеңдері. Объект құрылымын анықтау есебі. Модель құрылымының рөлі өте маңызды, ол дұрыс таңдап алынбаса параметрлік идентификаттаудың барлық нәтижелері заяға кетеді.

Объект құрылымын анықтау есептерінің арасында келесілерді ерекшелеуге болады:

1. объектті қоршаған ортадан ерекшелеп алу;
2. олардың соңғы мақсаттық көрсеткішке тигізетін әсерінің дәрежесі бойынша объекттің кірістері мен шығыстарын ранжирлеу;
3. модельді ескерілетін объекттің кірістері мен шығыстарының тиімді санын (мөлшерін) анықтау;
4. объект моделінің кірісі мен шығысының арасындағы байланыс сипатын, яғни жүйе операторының түрін анықтау. 050331500091

Осы мәселелердің әрқайсысын қысқаша қарастырайық.

Объектті қоршаған ортадан ерекшелеп алу. Үрдісті сипаттау Объектті қоршаған ортадан ерекшелеп алу үрдісі, ең алдымен, олар үшін модель құрылатын мақсаттармен анықталады. Мақсат, мысалы, басқаруға қатысты сыртқы сипатқа ие. Ол жоғарылау иерархиялық деңгейде тұжырымдалады және оның басқару объектісіне қоятын талаптарын білдіреді. Сонымен қатар, мақсаттарды анықтау оның ішінде осы мақсаттар жүзеге асырылуы тиіс болатын объект туралы түсініктермен байланысқан, яғни, басқару объектісінің моделіне ие болмай мақсатты тиімді тұжырымдау мүмкін емес. Сондықтан, мақсатты тұжырымдаудың алдында басқару объектісін анықтау үшін пайдаланылатын кейбір, жуықталаған болса да модель болуы тиіс. Объектті қоршаған ортадан ерекшелеп алу немесе (күрделі объект жағдайында) ішкі объекттерге жіктеу оның қоршаған ортамен немесе басқа ішкі объекттермен (буындармен) байланыстар саны минимум болатындай етіп жүзеге асырылуы тиіс. Бұл кезде бір мезгілде сонымен қатар объекттердің көбісіне тән өзіндік реттеу қасиеттерін пайдалану үшін ең жақсы шарттарды құру талабы да қанағаттандырылады. Объектті қоршаған ортадан ерекшелеп алу үрдісі объекттің қарапайым формаларынан күрделілеу формаларына тізбекті түрде өту ретінде жүзеге асырылуы мүмкін. Ең қарапайым форма ретінде қоршаған ортаның қойылған мақсаттың орындалуының тексеру үшін қажетті ақпаратты тасушы бөлігін қарастыруға болады. Одан әрі басқару мақсаты жақсырақ қанағаттандырылатындай етіп қоршаған ортаның бөлігін қосу арқылы объектті кеңейтеді, мысалы басқару ресурсын кеңейту арқылы. Бұл үрдіс басқару мақсатына тиімді қол жеткізілгенше немесе оған қол жеткізуге мүмкін еместігін көрсеткенше дейін қайталана берілуі мүмкін.

Объектті қоршаған ортадан ерекшелеп алу мысалы. Мысал ретінде металлды камералық пеште қыздыру үрдісін қарастырайық. Басқару мақсаты белгілі бір температураға дейін біркелкі жылынған (беті мен ортасының температуралары жақын болатын) дайындаманы алу болсын. Егер бұл кезде басқару объект ретінде тек дайындаманың өзін ғана ерекшелеп алсақ, онда сәйкес басқару ресурстары болмағанына байланысты берілген мақсат қолжетерліксіз екендігіне көз жеткізу оңай. Бұл объекттің кіріс параметрі жұмыстың кеңістіктің температурасымен тығыз байланысқан дайындама бетінің температурасы болып табылады, ал шығыс параметр – дайындаманың ортасы. Ең жақсы жағдайда, олардың алдын-ала анықталмаған деңгейінде уақыт факторының арқасында сол температуралардың теңесуіне қол жеткізуге болады. Егер объектті кеңейту есебінен оның құрамына жұмыстық кеңістіктің температурасын енгізсе де проблема айтарлықтай өзгермейді, себебі соңғысы тәуелсіз басқарушы әсер емес. Басқару объекті ретінде отын жағатын құрылғыларды және отын бен тотықтырғыштың шығындарын өлшейтін датчиктермен қоса пештің бүкіл жұмыстық кеңістігін қабылдаған жағдайда ғана қойылған есеп шешіледі. Объектті осылай ерекшелеп алғанда біздің билігімізде басқарудың қажетті ресурстары болады. Егер көрсетілген мақсатпен қатар кеңірек мақсат қойылатын болса, мысалы, отынды үнемдеу және қоршаған ортаны ластауды азайту, онда объекттің құрамына жылуды пайдаға асыратын құрылғыларды, газ тазалауды және түтін мұржасын қосу керек, ал шығыс параметрлер ретінде металлдың температурасымен қатар шығатын газдардың химиялы құрамын, температурасын және шаңдатылғанын қарастыру керек. Сонымен, осындай қарапайым мысалдан да басқару немесе зерттеу объектті дұрыс ерекшелеп алу қаншалықты маңызды екендігін көруге болады. Әрине, бұл белгілі бір есепті шешу үшін құрылатын модельдің құрылымын таңдауға тікелей әсерін тигізеді.

Кірістер мен шығыстарды ранжирлеу және олардың тиімді санын анықтау. Зерттеудің алғашқы кезеңдерінде көпұштық түрінде бейнеленуі мүмкін болатын модельдің құрылымын анықтау үшін модель құрамына кірістірілетін объекттің кірістері мен шығыстарын іріктеп алу болып табылады. Ол үшін алдымен олардың күйлері объектте мақсатты орындауға (мысалы, басқару мақсатын) белгілі бір әсерін тигізетін барлық кірістер мен шығыстар анықталады. Одан кейін олардың арасынан модельдің өлшемі П×Т көпұштықты құрайтын ең маңыздылары іріктеп алынады. Маңызды факторларды іріктеп алу оңай процедура емес. Ол үшін сараптамалық бағалар әдістері (тікелей ранжирлеу, жұптық салыстырулар әдісі және с.с.), нақтылы объекттің жұмыс жасауын және одағы оператордың тіршілігін бақылау, объектте арнайы жоспарланған және ұйымдастырылған эксперимент пайдаланылады. Модель құрылымы (кірстер мен шығыстар саны) туралы шешім қабылдау үшін бірнеше бәсекелес модельдер салыстырылуы мүмкін. Бұл кезде ең қолайлы модельді таңдау критериі ретінде бір жағынан оның дәлділігі екінші жағынан күрделілігі немесе жүзеге асырылуы болуы мүмкін.

Егер кейбір жуық модель немесе теория бар болса, онда маңызды параметрлерді іріктеп алу есебі едәуір жеңілдейді.

Кіріс пен шығыс арасындағы байланыс сипатын анықтау. Модельдің кірісі мен шығысының арасындағы байланыс сипатын (оператор түрін), яғни П×Т көпұштықтың ішкі құрылымын мақсатқа сай анықтау объектте өтетін үрдістердің механизмі туралы теориялық түсініктер негізінде ғана мүмкін. Кері жағдайда құрылымдарды тек жай сұрыптап шығу ғана қалады, ал ол айтарлықтай іске апайды. Құрылымдарды синтездеуді формализациялау әрекеттері бар, мысалы типтік буындарды, ұяшықтарды немесе шартты-элементарлы оператроларды: идеальды араластыру, ығыстыру, диффузия, химиялық кинетика, жылуберіліс және с.с. ерекшелеу арқылы. Өзара зат немесе энергия ағындарымен алмасатын осындай ұяшықтардан (буындардан) күрделі объекттер модельдерінің сәйкес құрылымдарын синтездеу ұсынылады. Әрине, мұндай тәсіл қарастырылатын есепті шешуді жеңілдетеді, бырақ, нақтылы объекттердің қасиеттерінің көптүрлілігін толығымен тамандай алуы мүмкін емес. Сондықтан құрылым туралы гипотезалар физикалық, физика-химиялық және нақтылы объекттер туралы басқа теориялық түсініктерді ескере отырып қойылады, ал осы гипотезаларды тексеру үшін экспериментальды-статистикалық әдістерді пайдаланады.

Қалдықтарды мазмұндық талдау құрылымдың адекваттылығы туралы гипотезаларды тексеру әдісі ретінде. Қателер мен қалдықтарды зерттеу. ε_i қалдықтар деп шығыс параметрдің нақтылы өлшенген y_i және модель көмегімен болжамдалған $\hat{y}_i$ арасындағы айырымдардың n мәндері түсініледі. Бұл регрессиялық немесе қандай да бомасын басқа теңдеу арқылы түсіндіруге мүмкін емес шамалар, яғни, модельдің қалдық қателері.

Қателерге қатысты келесі жорамалдар жасалады: қателер тәуелсіз, нөльдік орташа шамаға, тұрақты дисперсияға ие және таралудың қалыпты заңына бағынады.

Егер таңдап алынатын модель объектпен қанағаттанарлық сәйкестікте болатын болса, қалдықтар біз жасаған жорамалдарды растауы немесе кемінде оларға қайшы болмауы тиіс.

Келесі сұрақ тұжырымдалады: «Қалдықтар біздің жасаған жорамалдар қате екендігін дәлелдей ме?»

Қалдықтарды зерттегеннен кейін келесі қорытындылардың біріне келуге болады:

1. жорамалдар, бәлкім, бұзылған (кейбір мағынада)
2. жорамалдар, бәлкім, бұзылмаған.

Соңғысы біздің жорамалдықтың дұрыстығы туралы қорытындыға келгенімізді білдірмейді, дұрыс емес туралы тұжырымдауға біздің негізіміз жоқ.

Қателер мен қалдықтарды зерттеудің графикалық процедуралары. Қалдықтар графиктерінің негізгі түрлері. Модельді тексеру мақсатында қалдықтарды зерттеу процедуралары графикалық сипатқа ие, ол модель мен объекттің сәйкестік дәрежесін тек мөлшерлік емес сапалы да (мазмұнды) талдау жасауға мүмкіндік береді.

Қалдықтар графиктерінің негізгі түрлері:

1. жалпы; мысалы, таралу гистограммасы;
2. уақытқа немесе тәжірибенің нөміріне тәуелді, егер олардың тізбектілігі белгілі болса;
3. болжамдалатын $\hat{y}_i$ мәндеріне тәуелді;
4. кіріс x_{ji} факторларға тәуелді;
5. берілген нақтылы есеп үшін мақсатқа сай болатын графиктің кез-келген түрі.

Көрсетілген график түрлерінің кейбіреулерін нақтылау қарастырайық.

Таралу гистограммасы. Таралу гистограммасы келесідей құрылады. Айнымалының, біздің жағдайда модель қатесінің, бүкіл өзгеру диапазоны абсциссалар өсіне түсірілетін бірдей интервалдар (әдетте 10-15) қатарына бөлінеді, ал ординаттар өсінде қателердің осы интервалдардың әрқайсысына түсу жиілігі (жағдайлар саны) белгіленеді. Мысалы, 12.1,а суретте бейнеленген гистограмма симметриялы сипатқа ие және біздің жорамалдардың дұрыс болмауы туралы пікір жасауға ешқандай негіз бермейді.

Гистограмманың симметриялы емес сипаты немесе екінші "өркештің" бар болуы (сурет 12.1,б), модельде кейбір кездейсоқ емес құрамдасы ескерілмегендігі туралы куәландыруы мүмкін және модель қателігін тереңдеу талдау керек.

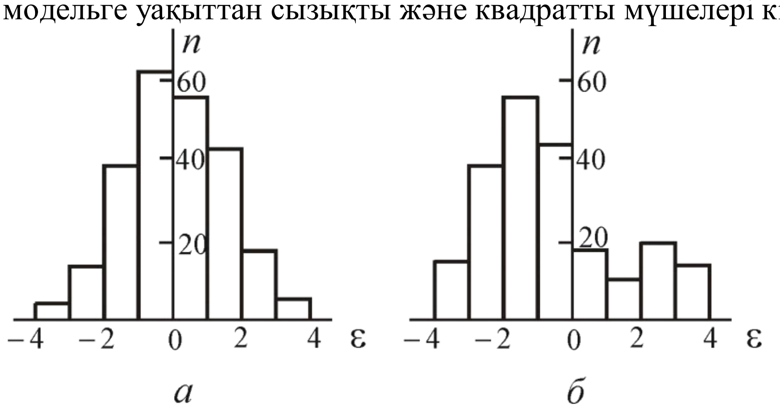
Уақыттық тізбектіліктің графигі. Қалдық қатенің уақытқа немесе жоғарыда аталған басқа факторларға тәуелділігінің бірнеше ерекше жағдайлары болуы мүмкін. Оларды алдымен мысалы 12.2,а суретте келтірілген уақыттық тәуелділік үшін

(б) жағдайда уақыт эффекті қатеге әсер тигізбейді және модельді одан ары дамытутың мақсатқа сай болатыны туралы шешім қабылдау үшін ешқандай негіз бермейді.

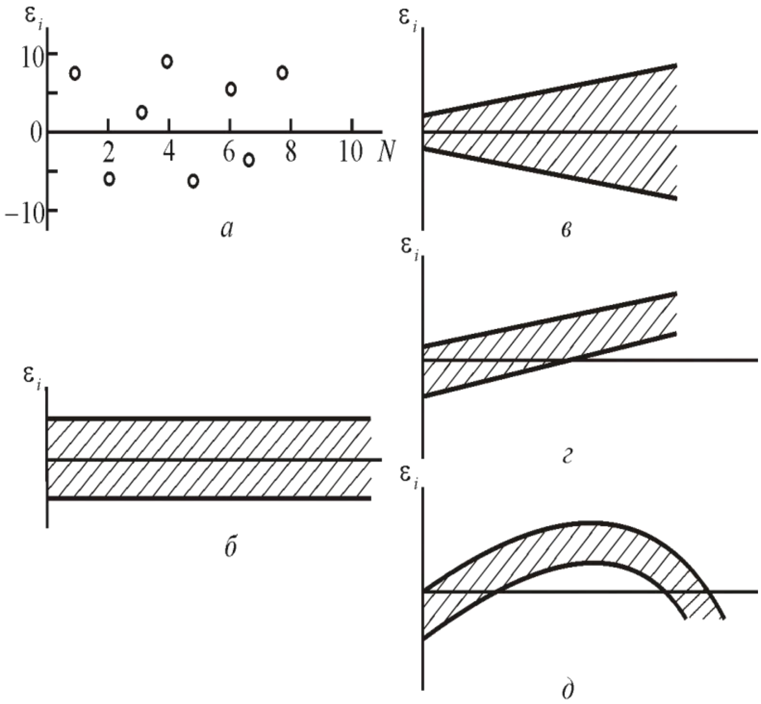
(в) жағдайда **дисперсия** тұрақты емес, ал уақыт барысымен өседі, ол өлшенген ең кіші квадраттар әдісін пайдалану қажеттілігін қоздырады.

(г) жағдайда уақыттан сызықты мүшені модельге қосқан мақсатқа сай.

(д) жағдайда модельге уақыттан сызықты және квадратты мүшелері кірістірілуі тиіс.

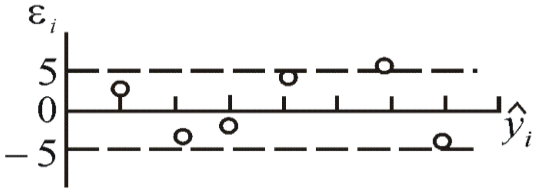


Сурет 12.1 - Таралу гистограммалары



Сурет 12.2 – Қалдық қате таралуының ерекше жағдайлары

Сонымен қатар, қарастырылған жағдайлардың әртүрлі терулері орын алуы мүмкін. Қалдықтардың $\hat{y}_i$-ге тәуелділік графигі 12.3 суретте келтірілген.



Сурет 12.3 – Шығыстың болжамдалған мәндеріне қалдықтардың тәуелділігі

Деректердің көбісінің көлденең жолаққа түскені біздің жорамалдар, бәлкім, дұрыс екендігін куәландырады. Жорамалдар ақталмаған жағдайлар үшін графиктер жоғарыда қарастырылғандарға (сурет 12.2,в,г,д) ұқсас түрге ие болуы мүмкін.

(в) жағдайда дисперсия жорамалға қарамастан тұрақты емес және $\hat{y}_i$-ке тәуелді, ол өлшенген ең кіші квадраттар әдісін пайдалану және $\hat{y}_i$ бақылауларды түрлендіру қажеттілігіне әкеледі. (г) жағдайда алынған теңдеуден (модельден) ауытқулар жүйелі сипатқа ие, ол модельде еркін мүше аңғармай қалдырып кеткендігін куәландыруы мүмкін. (д) жағдай – модель адекватты емес, модельге квадраттық мүшелерді және өзара әрекеттесулерді енгізу қажет.

Тәуелсіз x_j айнымалылардың әрқайсысы бойынша қалдықтардың графиктері ұқсама түрде құрылады және талдау жасалады. Мұнда (г) жағдай есептеулерде жіберілген қателердің немесе x_j ден сызықты мүшені негізсіз шығарып тастау салдары болуы мүмкін, ал (д) жағдай – модельге x_j ден квадратты мүшені енгізу қажеттілігі туралы куәландыруы мүмкін.

Басқа әдістер, тиімділік, шығарындылар.

Графиктердің басқа түрлерінің ішінен қалдықтарды әртүрлі агрегаттар, пештер, ауысымдар, бригадалар, жыл мерзіміне, оң және теріс қалдықтар серияларына және с.с. топтастыруды белгілеуге болады.

Модельдерді ретімен жетілдіру барысында қарастыруға жаңа айнымалыны енгізу тиімді болуы мүмкін. Қарастырылатын модельге кірістірілмеген жаңа айнымалыдан ε_i дің тәуелділік графигі құрылады. Егер мұндай тәуелділік байқалатын болса, онда осы айнымалыны есепке алу үшін сәйкес мүшелерді модельге енгізу мақсатқа сай.

Қалдықтарды зерттеуде шығарындылар қызықтыруы мүмкін – ол параметрлердің анықталған таралу заңынан едәуір ауытқулары. Деректердің үлкен ансамблі бойынша тұрақты орташа мәндерін алу көз қарасынан ені $\pm 3\sigma$ зонадан тыс шығарындыларды (мұнда: σ-орташа квадратты ауытқу), олар экспериментті қою және өткізу барысында жіберілген қателіктердің нәтижесі болып табылады деген жорамалдар жасап, ескермеу ұсынылады.

Егер себептерді анықтау, құбылыстардың ішкі механизмін ашу есебі қойылса, онда шығарындыларды өте мұқият талдау керек.

Жоғарыда қалдықтарды зерттеудің тек негіздері ғана қарастырылған, бырақ, ол модельдерді мазмұндық талдау және оларды құрылымдық жетілдіру бағыттарын анықтау барысында осы әдістің маңыздылығын түсіну үшін жеткілікті.

Қазіргі кезде құрылымдық идентификаттаудың бір қатар әдістері қарқынды дамуда, оларды химия және басқа салаларда пайдалану мысалдары бар.

Бақылау сұрақтары

1 Құрылымдық статистикалық сәйкестендіру;

2 тығыз байланыстың статистикалық критерийлері;

3 модель координаттарының себеп-салдарлық қатынастарын бағдарлау критерийлері мен әдістері;

4 Модель құрылымын сәйкестендіру кезеңінде шешім қабылдаудың статистикалық рәсімін ұйымдастыру;

5 объектіні ортадан бөлудің мысалдары;

6 қателер мен қалдықтарды зерттеудің графикалық процедуралары;

7 модельдерді дәйекті жетілдірудегі тиімділік жаңа айнымалыны қарастыруға кіріспе.

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

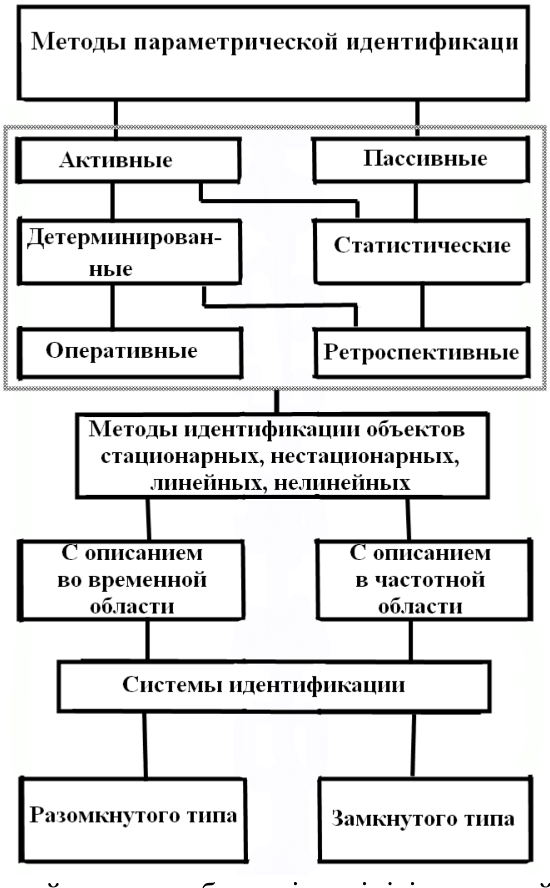
13 лекция Объектілердің параметрлерін және күйін бағалау

Мақстаы: тақырыбының материалы келесі мәселелерді қамтиды: объекттердің параметрлері мен күйлерін бағалау; Калман-Бьюси фильтрі; параметрлер мен күйлерді бір уақытта бағалау; квазисызықтандыру әдістері

Тезистер

Объекттердің параметрлері мен күйлерін бағалау параметрлік идентификаттау кезеңінде орындалады.

Параметрлік идентификаттау есептерін шешу үшін объекттердің ерекшеліктерін, олардың жұмыс жасау шарттарын, эксперименттальды деректерді тестілеу тәсілі мен талдаудың математикалық негізін, пайда болатын модельдердің түрін және с.с. ескеретін көптеген әдістер жетілдірілген. Параметрлік идентификаттау әдістерін түрлі белгілерімен сипаттауға болады. Зерттелетін объектті тестілеу тәсілі бойынша идентификаттау әдістері белсенді және пассивті әдістерге жіктеледі.



Белсенді әдістерді пайдалану объекттің кірісіне арнайы қалыптастырылған – детерминді немесе кездейсоқ сипатты әсерлерді беруді жорамалдайды. Идентификаттаудың белсенді әдістерінің арасында гармоникалық кіріс әсердің себебінен пайда болған зерттелетін объекттің тұрақталған шығыс сигналдарын өлшеуге негізделген жиіліктік әдістер кең қолданысқа ие болды. Сызықты объекттерді идентификаттау үшін басқа да периодтық (тікбұрышты, үшбұрышты) әсерлерді, және сонымен қатар, сатылы, импульсті және басқа сигналдар түріндегі апериодикалық әсерлерді пайдаланады. Кездейсоқ тестілеу сигналдар ретінде псевдокездейсоқ екілік тізбектілер әсіресе кең пайдаланады, оның себебі оларды алу оңай және есептеуіш техника құралдары көмегімен өңдеу ыңғайлы. Белсенді идентификаттаудың құндылығы объект туралы априорлы деректерге қойылатын талаптардың қатаң еместігінде. Экспериментті жоспарлау әдістеріне негізделіп мұндай идентификаттауды мақсатқа сай орындауға болады, ол объекттің айнымалыларының арасындағы тәуелділіктердегі заңдылықтарды анықтауды жылдамдатуға және соған байланысты оны сынақтауға жұмсалатын уақыттық және заттық шығындарды қысқартуға мүмкіндік береді.

Идентификаттаудың пассивті әдістерін пайдаланғанда объект қалыпты жағдайларында жұмыс жасайды. Бұл кезде оның моделінің параметрлері оның кірісі мен шығысындағы шамалардың табиғи өзгерулерін бақылауларды статистикалық өңдеу нәтижелері бойынша ізделінеді. Пассивтік идентификаттауда өлшенген деректерді өңдеудің статстикалық принциптерін пайдаланады (корреляциялық және регрессиялық талдау әдістері, стохастикалық аппроксимациялау және с.с.). Пассивті әдістердің жетістігі – оларды қолдану үшін объекттің кәдімгі жұмыс жасау режимдерінде ғана айнымалыларды тіркеу жеткілікті. Бұл әсіресе қымбат құнды өнімді үздіксіз өндіретін нақтылы өндірістік үрдістерді идентификаттауда маңызды. Екінші жағынан, идентификаттаудың пассивті әдістерде ақпаратты жинақтау және өндеуге жұмсалатын уақыт шығындары едәуір. Сонымен қатар, объекттің кірісіндегі әсер жеткілікті түрде кең жиілік спектрге ие болған жағдайда ғана оларды пайдалануға болады. Соңғы себепке байланысты идентификаттау дәлдігінің төмендеуін едәуір азайтуға болады егер объекттің табиғм кіріс әсеріне статистикалық сипаттары берілген аз деңгейлі арнайы кездейсоқ сигналды қосса. Бұл жағдайда әдетте объектке әсер тигізетін бақыланбайтын бөгеуілдердің әсері де азаяды.

Объекттерді идентификаттауда бақылау деректерін өндеудің детерминді және статистикалық әдістерін пайдаланады, ол талдауға жататын сигналдардың сипатына байланысты. Детерминді әдістерді тек белсенді идентификаттауда, объекттің кірісі мен шығысындағы сигналдар детерминді түрге ие болатын жағдайда ғана пайдалануға болады. Бырақ, нақтылы жағдайларда, бөгеуілдердің қатты әсерінен мұндай сигналдар қатты шуланған. Талдаудың талап етілетін дәлдікке бұл жағдайда өндеудің детерминді алгоритмдерді алынған нәтижелерді статистикалық орташалаумен (тегістеу) толықтыру арқасында қол жеткізуге болады. Әрине, бұл үшін деректерді жинау мақсатында объектті ұзақрақ сынақтау қажет.

Уақыттық шығандар белгісі бойынша идентификаттау әдістері оперативті және ретроспективтілерге жіктеледі. Оперативті идентификаттауда объекттің өзгеретін параметрлерін бақылау қамтамасыз етіледі. Бұл мақсатпен деректерді өңдеудің реккурентті алгоритмдерін пайдаланады, оларды аппараттық құралдар арқылы зерттелетін объектте өтетін үрдістердің жылдамдығына жақын теаппен жүзеге асыруға болады. Ретроспективті идентификаттауда идентификаттау есебін шешу шарттарын едәуір жеңілдетеді. Бұл жағдайда жинақталған экспериментальды деректерді көп рет пайдалануға және оларды талдаудың ең тиімді алгоритмдерін таңдауға болады.

Идентификаттау әдістерін көп жағдайларда белгілі бір класстың динамикалық объекттерін зерттеуге бейімделінуін көрсететін белгі бойынша да ажыратады. Алынатын модельді объектпен салыстыру процедуралардың бар немесе жоқтығы идентификаттауда маңызды ерекшелік болып табылады. Бұл сәйкесінше идентификаттау жүйелерін құрудың мүмкін болатын екі құрылымын анықтайды: ажыратылған және тұйықталған схемалар бойынша.

Идентификаттау есебін шешу нәтижесі болып уақыттық немесе жиілік аумақта бейнеленген математикалық модель табылады. Бұл кезде алынған модель объектке тәртібі бойынша, яғни, идентификаттауда таңдап алынған ұқсастық критерийге сәйкес динамикалық қасиеттері бойынша адекватты.

Объекттердің параметрлері мен күйлерін бағалау саласынан кейбір негізгі түсініктерді қарастырайық.

Винер бағалауы — шексіз бақылау уақытта нақытылы y(t) және қалаулы d(t) шығыс сигналдар арасындағы орташа квадратты қатені минимизациялайтын сызықты стационарлы жүйенің импульстік сипаттамасын табу есебі. Жүйенің кірісіне f(t) сигнал беріледі, шығыс сигнал келесі өрнекпен анықталады:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

Қолдану шарттары, сигналдар мен бөгеуілдердің сипаттары жеткілікті түрде тұрақтыболып қалады, олардың статистикалық сипаттамалары аз өзгереді деп жорамалданады. Егер шарттар ауыспалы және жүйенің жұмыс жасау барысында бөгеуілдер елеулі өзгеретін болса, онда жүйе параметрлерін автоматты түрде оптимизациялау қажеттілігі пайда болады. Бұл түрлі экстремальды, адаптивті, үйренетін жүйелерде жүзеге асырылады.

Винер–Хопф теңдеуі. Объекттің импульстік өтпелі функциясын анықтаудың статистикалық әдістерінің негізінде Фредгольмнің интегральды теңдеуі $(-\infty < t < \infty)$ немесе **Винер–Хопф** интегральді **теңдеуі** (t>0) жатыр:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - t) g(t) dt \approx \int_{0}^{T} R_{xx}(\tau - t) g(t) dt \,, \qquad \text{(ВХТ)}$$

мұнда: $g(t)$ - объекттің импульстік сипаттамасы, салмақтық функциясы.

Бұл теңдеуден анықталған $g(t)$ орташа квадратты қателік мағынасында ең жақсысы болып табылады. (ВХТ) теңдеуінде белгіленген *Rxy* – шығыс пен кірістің өзара корреляциялық функциясы; *Rxx* – кіріс сигналдың корреляциялық функциясы.

$g(t)$-ны анықтау мақсатында (ВХТ) теңдеуін шешуді түрлі әдістермен орындайды, мысалы, басқарылатын фильтрде импульстік функцияның ординаттарын іріктеп алу әдісімен (арнайы аппаратураны талап етеді); (ВХТ) теңдеуін сызықты алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіру әдісімен; Фурье түрлендіруі әдісімен.

ВХТ-ны Винер және Хопф жұлдыздар ішіндегі радиациялық тепе-теңдік есебін шешу барысында тапқан. Бұл теңдеу кибернетикада да оның шумен арласқас қоспасынан пайдалы сигналды ерекшелеп алып, фильтрлеу есептерін шешу барысында пайдаланылады.

$y(t)$ кірісі бар сызықтық объекттің $x(t)$ шығысы үйірткі интегралымен анықталатынын еске салайық:

$$x(t) = \int_{0}^{t} g(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_{0}^{t} g(\tau) y(t-\tau) d\tau \qquad \text{(ҮТ)}$$

Винер фильтрі. Екінші дүние жүзілік соғыс кезінде Винер интерполяция, экстраполяция және уақыттық қатарларды тегістеу бойынша өзінің фундаментальды, қазіргі кезде классикалық болған зерттеулерін орындады. Калман фильтрі күйлер кеңістігінде тұжырымдалған шешімді алуға мүмкіндік береді. Винер әдісіне қарағанда Калман фильтрі бейстационарлы сигналдар жағдайына оңай таралады.

Калман-Бьюси фильтрі. 1960 жылы Рудольф Калман дискретті бейстационарлы гаусcты кездейсоқ үрдістерді сызықты оптимальды фильтрлеу есепті шешу алгоритмін ұсынды. Ал 1961 ж. Р.Бьюси мен бірге ол үздіксіз уақыт үшін есеп шешімінің алгоритмін жариялады. Р. Калман сызықты оптимальды фильтрлеу есеп қойылымын бір шама өзгертті. Ол математикалық күтім мен ковариацияның орнына бағаланатын кездейсоқ x(t,ω) үрдісті сипаттау үшін қалыптастырушы фильтрді – ақ гаусс шуымен қоздырылатын динамикалық жүйені қолданды. Нәтижеде өлшеулерде ақ шу орын алатын жағдайда бағалау есебін шешудің реккурентті алгоритмі пайда болды. Алгоритм ЭЕМде жүзеге асыру үшін ыңғайлы.

Винер фильтрлері үрдістерді немесе үрдістердің кесінділерін толығымен өңдеу үшін лайықты (блоктық өңдеу). Тізбекті түрде өңдеу үшін бақылау барысында фильтр кірісіне келіп түсетін ақпаратты ескере отырып, әр тактіде сигналдың ағыдағы бағасы қажет. Винерлік фильтрлеуде сигналды әр жаңадан еспке алу фильтрдің барлық салмақтық коэффициенттерін қайта есептеуді талап ететін еді. Қазіргі кезде адаптивті фильтрлер кең қолданылады, оларда келіп түсетін жаңа ақпарат сигналдын ертеректе жасалған бағасын үздіксіз корректірлеу үшін пайдаланылады (радиолокацияда нысананы алып жүру, басқаруда автоматты реттеу жүйелері және с.с.)

Калман фильтрі — бір қатар толық емес және шуланған өлшеулерді пайдалана отырып, динамикалық жүйе күйінің векторын бағалайтын тиімді рекурсивті фильтр. Ол инженерлік және эконометрикалық қосымшаларда: радарлар мен техникалық көру мүшесінен бастап макроэкономикалық модельдердің параметрлерін бағалауға дейін кең пайдаланылады. Калмандік фильтрлеу басқару теориясының маңызды бөлімі болып табылады, басқару жүйелерді құруда үлкен рөль атқарады. Бір қатар қол жетерлік өлшеулер бойынша Калман фильтрі объект моделінің көмегімен ішкі күйдің бағасын алуға мүмкіндік береді. Калман фильтрі априорлы белгілі динамикалық жүйенің күйлер векторын рекурсивті түрде қосымша бағалауға арналған, яғни жүйенің ағымдағы күйін есептеу үшін ағымдағы өлшеу және сонымен қатар фильтрдің өзінің алдыңғы күйін білу қажет. Сонымен, Калман фильтрі көптеген басқа рекурсивті фильтрлер сияқты жиіліктік емес уақыттық бейнелеуде жүзеге асырылған.

Параметрлер мен күйлерді бір уақытта бағалау

Параметрлерді бағалау есебі күйді фильтрлеу және бағалау есептерімен тығыз байланыс. Пайдалы сигналдарды қалаусыз ұйытқулардан (шулардан) ажыратып алуға мүмкіндік беретін сигналдарды өңдеу схемалары фильтрлер деп аталады.

Жоғарыда аталған Калман фильтрін бөгеуілдермен бұрмаланған өлшеулердің нәтижелерін өңдеуге арналған әдіс (аппаратура, есептеу программасы) ретінде сипаттауға болады; бұл өңдеу кейбір айнымалының оптимальды бағасы пайда болатындай етіліп орындалуы тиіс. Бұл фильтрді бір қатар есептерде пайдалануға болады:

а) уақыттық қатарлар мен үздіксіз сигналдарды фильтрлеу, интерполяциялау, тегістеу, экстраполяциялау (болжау);

б) объектінің күйлер векторының кейбір немесе тіпті барлық компоненттерін тікелей өлшеу мүмкін болмаған жағдайларда оптимальды басқару алгоритмдерін жүзеге асыру үшін қажет болатын күйді бағалау;

в) қателіктер түрімен айрықшаланатын бірнеше өлшеуіш аспаптармен кейбір айнымалыны өлшеу нәтижелерін біріктіру (мысалы, навигациялау есептерінде — акселерометрлер, гироскоптар, Допплер эффектін өлшеу радиолокаторлар және с.с.);

г) күйлер векторынан параметрлер векторына өту арқылы параметрлерді бағалау.

Квазисызықтандыру әдістері

Квазисызықтандыру әдісін бейсызықты дифференциальды теңдеулер теориясының шеттік есептерін шешу үшін алғашқы рет Беллман жіне Калаба енгізген [1, 2]. Бұл әдісті бейсызықты жүйелердің параметрлерін идентификаттау үшін пайдалану негізінде [3-6] еңбектерде қарастырылған.

Квазисызықтандыру әдісі - негізінде стационарлы болып табылатын бейсызықты көпнүктелі шеттік есепті сызықты бейстационарлы есепке түрлендіру әдісі. Бұл әдісті үздіксіз де дискретті де үрдістерге пайдалануға болады. Идентификатталатын параметрлер тұрақты деп жорамалданады және бейсызықты жүйелерді идентификаттаудың барлық басқа әдістеріндегідей бейсызықтықтың түрі берілуі тиіс, кемінде аппроксимация түрінде. Егер олар идентификаттау процедурасының жинақтылық жылдамдығымен салыстырғанда жәй өзеретін болса параметрлердің бейстационарлығын ескеруге болады. Процедураның жинақтылығы жоғары болады егер идентификатталанатын параметрлердің шамаларына жақын бастапқы жуықтау бар болса. Әдіс өз мағынасы бойынша итерациялық болып табылады, ол арнайы сынау әсерлерін енгізуді қажет етпейді, сондықтан ол уақыттың нақтылы масштабында пайдалануға лайықты.

Келесі теңдеумен сипатталатын бейсызықты жүйені қарастырайық:

$$\dot{x} = f(x,u,q), \tag{13.1}$$

мұнда: x – өлшемі n болатын күйлер векторы; u – өлшемі m болатын кіріс әсерлер векторы; q – вектор параметров системы размерности өлшемі k болатын жүйе параметрлерінің векторы; f – өлшемі n болатын вектор-функция.

u және x векторлар өлшенеді (x жартылай өлшенуі мүмкін), f вектор-функция компоненттерінің түрі белгілі деп жорамалданады. Параметрлер векторы q белгісіз және оны идентификаттау керек.

q параметрлер векторының компоненттері идентификаттау интервалында өзгермейді деп жорамалдаймыз, яғни:

$$\dot{q} = 0. \tag{13.2}$$

Жаңа күйлер векторын енгізейік:

$$\chi = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \hdashline q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}. \tag{13.3}$$

Бұл вектор үшін келесі теңдеу әділ: $\dot{\chi} = \Psi(\chi,u),$ (13.4)

$$\text{мұнда: } \Psi = \begin{bmatrix} f_1(\chi,u) \\ \vdots \\ f_n(\chi,u) \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{13.5}$$

Күйлер векторын (13.4) бағалаудың N-ші итерациясы $\hat{\chi}_N$ табылған дейік. Онда, (13.5) теңдеуді $\hat{\chi}_N$-ке қатысты Тейлор қатарына жіктеп және шағындығы бірінші ретті мүшелерін ғана ескере отырып, вектордың *(N+1)*-ші бағасын аламыз:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{\Psi}_{N+1} = \hat{\Psi}_N + \frac{\partial \hat{\Psi}_N}{\partial \chi}(\hat{\chi}_{N+1} - \hat{\chi}_N), \tag{13.6}$$

мұнда: $\dfrac{\partial\hat{\Psi}_N}{\partial\chi} = \left.\dfrac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi}\right|_{\chi=\chi_N}$, $\qquad \dfrac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi} = \left[\dfrac{\partial\hat{\Psi}}{\partial x} \,\vdots\, \dfrac{\partial\hat{\Psi}}{\partial q}\right]$,

$$\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\hat{\Psi}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\hat{\Psi}_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\Psi}_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\hat{\Psi}_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\hat{\Psi}_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\Psi}_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial q_k} \\ \frac{\partial\hat{\Psi}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial\hat{\Psi}_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\Psi}_2}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\hat{\Psi}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial\hat{\Psi}_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\Psi}_n}{\partial q_k} \end{bmatrix}.$$

(13.6) теңдеу $\hat{\chi}_{N+1}$-ке қатысты сызықты, сондықтан оны келесі түрде жазуға болады:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{A}_N\hat{\chi}_{N+1} + \hat{V}_{N+1}, \tag{13.7}$$

мұнда:

$$\hat{A}_N = \left.\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi}\right|_{\chi=\hat{\chi}_N},\ \hat{V}_N = \hat{\Psi}\Big|_{\chi=\ddot{x}_N} - \left.\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi}\right|_{\chi=\hat{\chi}_N} = \hat{\Psi}_N - \hat{A}_N\hat{\chi}_N.$$

(13.7) теңдеу сызықты бейстационарлы. Оның шешімі келесі түрге те:

$$\hat{\chi}_{N+1}(t) = X_N(t,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)V_N(\tau)\,d\tau, \tag{13.8}$$

немесе

$$\hat{\chi}_{N+1}(t) = X_N(t,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)\hat{\Psi}_N(\tau) - \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)\hat{A}_N(\tau)\hat{\chi}_N(\tau)d\tau \tag{13.9}$$

мұнда: $X_N(t,\tau)$ – біртекті теңдеудің фундаментальды матрицасы:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{A}_N\hat{\chi}_{N+!}. \tag{13.10}$$

Өлшемі $n+k$ болатын χ векторды табу үшін $n+k$ өлшеулерге ие болу керек. Күйлер векторының $x_l(t_j)$ компоненттері өлшенетін болсын дейік, яғни, уақыттың t_j моменттеріндегі күйлер векторының j-ші компоненттері. Онда $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$ вектор келесі көпнүктелі шептік шартты қанағаттандырады:

$$x_j(t_j) = X_{j,N}(t_j,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \rho_{j,N}(t_j), \tag{13.11}$$

$$\rho_{j,N}(t_j) = \int_{t_0}^{t_j} X_{j,N}(t_j,\tau)V_N(\tau)\,d\tau. \tag{13.12}$$

(13.11) және (13.12)-де $X_{j,N}()$ арқылы фундаментальды $X_N()$ матрицаның j-ші қатары белгіленген. Күйлер векторының $x_j(t_j)$ компоненттері бірдей немесе әртүрлі болуы мүмкін.

$n+k$ өлшеулер бар болғандықтан, (13.11) теңдеулер саны да $n+k$. Негізінде, (13.11) теңдеулер $n+k$ айнымалылары бар сызықты алгебралық теңдеулер болып табылады. Сонымен, $n+k$ өлшеулер $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$ векторды құрайтын $n+k$ белгісіздері бар $n+k$ сызықты алгебралық теңдеулерді береді. Осы вектор ізделінеді де және оның соңғы k компоненттері ізделінетін q параметрлер векторы болып табылады.

Квазисықтандыру әдісімен идентификаттаудағы есептеулер алгоритмінің блок-схемасы 13.1 суретте келтірілген. 2-ші блокта $x_j(t_j)$-ді $n+k$ өлшеулері, параметрлер векторының бастапқы $\hat{q}_0$ жуықталуы және күйлер векторы үшін $x_0(t_0)$ бастапқы шарттар енгізіледі.

4-ші блокта бірінші қадамда $\hat{q}_0, x_0(t_0)$ болып табылатын $\hat{q}_{N+1}, x_N(t_0)$ бастапқы жуықтаулармен теңдеудің шешімі ізделінеді. Шешім $[t_0, t_{max}]$ интервалда орындалады, мұндағы: t_{max} – оларда $x_j(t_j)$ өлшеулер жүргізілетін t_j уақыттардың арасындағы максималдысы.

5-ші блокта 4-ші блокта алынған $x(t)$ шешімі (13.11) теңдеудегі бағаларды алу үшін (13.9) теңдеуге қойылады.

6-ші блокта $n+k$ сызықты алгебралық (13.11) теңдеулер жүйесі шешіледі және $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$, яғни, $\hat{q}_{N+1}$ және $\hat{x}_{N+1}(t_0)$ ізделінеді.

7-ші блокта соңғы екі қадамдағы параметрлер векторының жуықталулар айырымының нормасы бағаланады. Егер ол норма берілген ε шамадан аспайтын болса, онда идентификаттау үрдісі аяқталады да, ал 9-ші блокта параметрлер векторының табылған мәні шығарылады. Кері жағдайда келесі итерацияға өту орындалады.

Параметрлердің бастапқы жуықталулары ақихат мәндерге жеткілікті түрде жақын болатын жағдайда ғана квазисықтандыру әдісімен идентификаттау процедурасы ақихат мәндерге жинақталады. Бастапқы жуықтауды алу үшін сызықтандырылған модельді идентификаттау нәтижелерін немесе идентификаттаудың эвристикалық әдістерін пайдалануға болады.

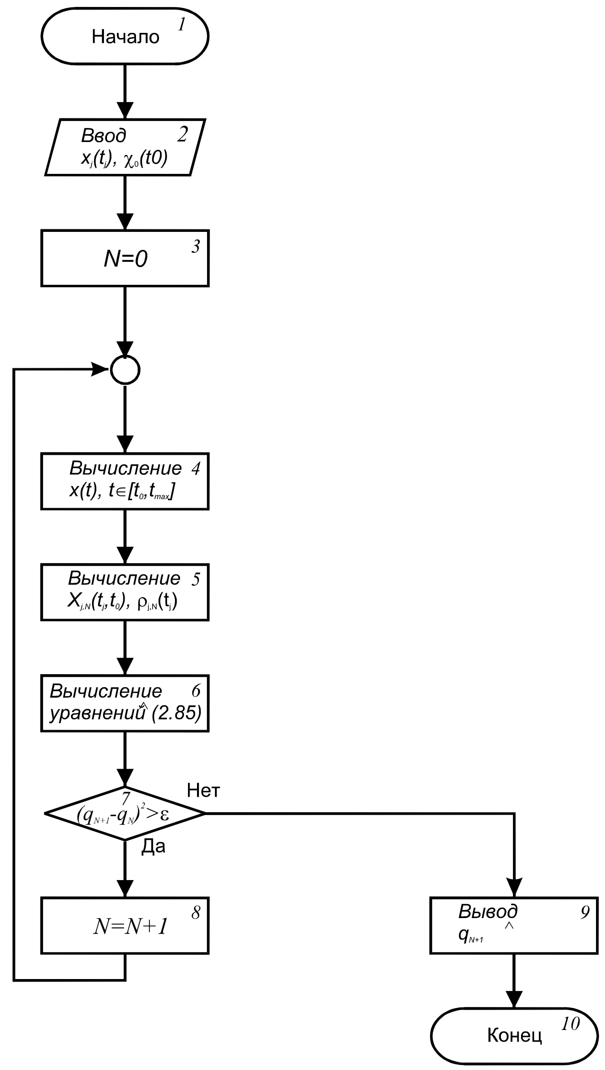


Рис. 2.2. Блок-схема алгоритма вычислений при идентификации методом квазилинеаризации

Сурет 13.1 Квазисызықтандыру әдісімен идентификаттаудағы есептеулер алгоритмінің блок-схемасы

Квазисызықтандыру әдісін жүзеге асыру мысалын қарастырайық:
Жеткілікті түрде қарапайым жүйені қарастырайық:

$$\dot{x} = ax^3 + bu(t). \qquad (13.13)$$

мұнда: u(t) – кіріс өлшенетін скалярлы функция,
x – скаляр,
a, b – табу керек.

Күйлер айнымалысын x(t1), x(t2), x(t3) үш өлшеулері бар. Белгілейік:

$$\chi=\begin{bmatrix}x\\a\\b\end{bmatrix}.$$

(13.6)-ға сәйкес χ вектордың (N+1)-ші жуықталуының түрі:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1}=\hat{\Psi}\Big|_{\hat{\chi}=\hat{\chi}_N}+\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi}\Big|_{\hat{\chi}=\hat{\chi}_N}(\hat{\chi}_{N+1}-\hat{\chi}_N),\qquad(13.14)$$

$$\hat{\Psi}=\begin{bmatrix}\hat{a}\hat{x}^3+\hat{b}u\\0\\0\end{bmatrix},\quad \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi}=\begin{bmatrix}3\hat{a}\hat{x}^2 & x^3 & u\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\qquad(13.15)$$

(13.10) теңдеуге сәйкес:

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}\\\dot{\hat{a}}\\\dot{\hat{b}}\end{bmatrix}_{N+1}=\begin{bmatrix}3\hat{a}\hat{x}^2 & x^3 & u\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_N\begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{a}\\\hat{b}\end{bmatrix}_N.\qquad(13.16)$$

(13.16) теңдеуден XN(t,t0) фундаментальды матрица ізделінеді. (13.7)-ға сәйкес:

$$\hat{V}_N=\hat{\Psi}_{\chi=\hat{\chi}_N}\Big|-\hat{A}_N\hat{\chi}_N=\begin{bmatrix}\hat{a}\hat{x}^3+\hat{b}u\\0\\0\end{bmatrix}_N-\begin{bmatrix}3\hat{a}\hat{x}^2 & \hat{x}^3 & u\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_N\begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{a}\\\hat{b}\end{bmatrix}.\qquad(13.17)$$

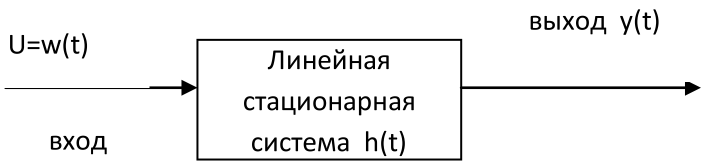
(13.17) және (13.13) ескере отырып, табылған $X_N(t,t_0)$ бойынша $\rho_{j,N}(t_j)$ ізделінеді. Одан кейін келесі теңдеулерден:

$$\begin{cases}x(t_1)=X_{11,N}(t_1,t_0)\hat{x}_{N+1}(t_1)+X_{12,N}(t_1,t_0)\hat{a}_{N+1}(t_1)+X_{13,N}(t_1,t_0)\hat{b}_{N+1}(t_1)+\rho_{1,N}(t_1),\\x(t_2)=X_{11,N}(t_2,t_0)\hat{x}_{N+1}(t_2)+X_{12,N}(t_2,t_0)\hat{a}_{N+1}(t_2)+X_{13,N}(t_2,t_0)\hat{b}_{N+1}(t_2)+\rho_{1,N}(t_2),\\x(t_3)=X_{11,N}(t_3,t_0)\hat{x}_{N+1}(t_3)+X_{12,N}(t_3,t_0)\hat{a}_{N+1}(t_3)+X_{13,N}(t_3,t_0)\hat{b}_{N+1}(t_3)+\rho_{1,N}(t_3).\end{cases}\qquad(13.18)$$

$\hat{x}_{N+1}(t_0),\ \hat{a}_{N+1},\ \hat{b}_{N+1}$ ізделінеді. Қажет болса процедура қайталанады.

Сызықты динамикалық жүйелерді идентификаттау. Үйірткі теңдеуінен салмақтық функцияны анықтау

Уақыттың шектелген аралығында сызықты стационарлы жүйенің кіріс және шығыс сигналдарын бақылау нәтижелері бойынша оның салмақтық функциясын (импульстік өтпелі функциясын) анықтау керек.



Сурет 13.2 – Сызықты стационарлы жүйе

Кірісі мен нөльдік бастапқы шарттарда жүйенің шығыс сигналы үйірткі интегралымен өрнектеледі:

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)w(\tau)d\tau\qquad(13.23)$$

$r<0$, $w(0)\neq 0$ болғанда $w(\tau)=0$ деп жорамалданады.

Енді уақыттың $w(t)$ кіріс функциясын Δ қадаммен N нүктелерде құрама-тұрақты функциямен аппроксимациялауды енгізейік, сонымен қатар, $N\Delta = T$:

$$w(t) \approx w(n\Delta) \quad \text{при} \quad n\Delta < t < (n+1)\Delta \tag{13.24}$$

Бөлу нүктелердің арасындағы h(t) –ны тұрақты етіп қабылдаймыз:

$$n\Delta<t<(n+1)\Delta \ \text{болғанда} \ h(t) \approx h\left(\frac{2n+1}{2}\Delta\right) \tag{13.25}$$

t=nΔ болғанда (13.23) интеграл $w(t)$ және $h(t)$ сатылы аппроксимациялау терминдерінде жуықтап келесі түрде жазылады:

$$y(n\Delta) = \Delta\sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{2n-1}{2}\Delta - i\Delta\right) w(i\Delta)$$

(13.25)

Шығысты (өлшемі N) бақылау векторын $Y^T(T)$ = [y(Δ) y(2Δ) ... y(NΔ)] және салмақтық функция мәндері: $h^T(T) = \left[h\left(\frac{\Delta}{2}\right) h\left(\frac{3\Delta}{2}\right) \ldots h\left(\frac{2N-1}{2}\Delta\right)\right]$ арқылы белгілейік.

(13.25) теңдеуді векторлы-матрицалық түрде қайта жазайық:

$$Y(T) = \Delta W h(T) \tag{13.26}$$

W матрица келесі теңдікпен анықталады:

$$W = \begin{bmatrix} w(0) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ w(\Delta) & w(0) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ w(2\Delta) & w(\Delta) & w(0) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w[(N-1)\Delta] & w[(N-2)\Delta] & \ldots & \ldots & \ldots & w(0) \end{bmatrix}$$

W – сол жақты үшбұрыш матрица, диагоналінде $w(0)$.

Енді есеп (13.26) теңдеуден фиксациялау нүктелерінде салмақтық функция мәндерінің h векторын анықтауға келтірілді. $w(0) \neq 0$, болғандықтан w – өзгешеленбеген және $\det W \neq 0$.

Сондықтан (13.26) теңдеу шешімін формальды келесі түрде жазуға болады:

$$h = W^{-\Delta} y \tag{13.27}$$

W матрицаның сол жақты үшбұрышты формада болуының арқасында h үшін өрнекті рекуррентті түрде қайта жазуға болады:

$$h_n = \frac{1}{w(0)}\left[\frac{Y(n\Delta)}{\Delta} - \sum_{i=1}^{n-1} h_{n-i} w(i\Delta)\right] \tag{13.28}$$

мұнда: $h_n = h\left(\frac{2n-1}{2}\Delta\right)$, $\qquad h_1 = \frac{Y(\Delta)}{\Delta w(0)}$

Қарастырған тәсілдің құндылығы – кез-келген кіріс сигналдарды пайдалану мүмкіндігі. Арнайы тестілік сигналдарды пайдалану қажеттілігі болмағандықтан жүйені қалыпты пайдалану үрдісінде алынған жүзеге асыруларын пайдалануға болады.

Егер кіріс сигнал бірлік секірудің функциясы болатын болса, (13.28) алгоритмі едәуір жеңілдейді. Бұл жағдайда барлық і үшін w(iΔ) = 1, (13.28) келесі түрге ие болады:

$$h_n = \frac{y(n\Delta)}{\Delta} - \sum_{i-1}^{n-1} h_{n-i} \ .$$

$H_n = \sum_{i-1}^{n-1} h_{n-i}$ шаманы анықтап $h_n = \frac{y(n\Delta)}{\Delta} - H_n$ аламыз, бұл кезде $H_n = H_{n-1} + h_{n-1}$.

Салмақтық функцияны ең кіші квадраттар әдісі бойынша бағалау

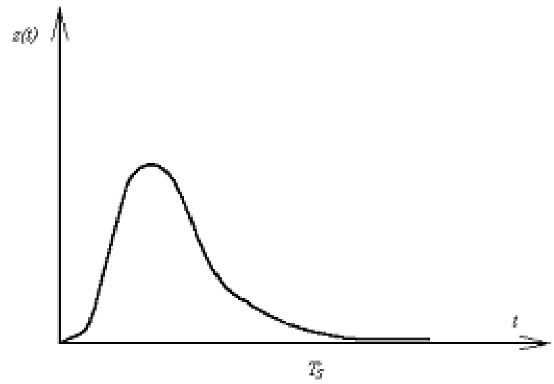
13.2 суретте көрсетілген бір кірісі және бір шығысы бар жүйені қарастырайық. Объект сызықты стационарлы деп жорамалданады. Жүйенің шығысын келесі түрде жазамыз (13.3 суретті қараңыз):

$$z(t) = \int_0^{T_S} h(\tau)x(t-\tau)d\tau + n(t) \qquad (13.29)$$

$h(\tau)$ – салмақтық функция (импульстік өтпелі функция)

$x(t-\tau)$- кіріс, $n(t)$ - алшақтық (кейде шу деп атайды),

T_S – тұрақтану уақыты, импульстік сигналды беру моментінен жүйенің реакциясы ең үлкен мәнінен 5% құрайтын моментке дейінгі уақыттың min интервалы ретінде анықталады.



Сурет 13.3 - Жүйе шығысының z(t) уақыттан тәуелділігі – 13.29 теңдеу

Кіріс және шығыс айнымалылар (13.29) формулада өздерінің математикалық күтімдерінен ауытқулар түрінде бейнеленген, яғни:

$$x(t) = x - m_x, \qquad z(t) = z - m_z.$$

(13.29) теңдеуді дискретті түрде бейнелейік:

$$z(i\Delta) = \sum_{j=0}^{N_S-1} h(j\Delta)x[(i-j)\Delta]\Delta + n_i, i = 0,1,..., N_{m-1}$$

немесе

$$z_i = \sum_{j=0}^{N_S-1} h_j x_{i-j}\Delta + n_i, \qquad (13.30)$$

мұнда: $T_S = N_S\Delta$ - тұрақтану уақыты, $T_m = N_m\Delta$ - шығысты өлшеу уақыты, N_i – уақыттың $n(i\Delta)$ моменттеріндегі алшақтықтыларды ғана емес функцияны аппроксимациялау $x(t-\tau)$ қателерін де қамтиды.

Аппроксимациялау нәтижесінде үздіксіз $h(\tau)$ функцияны бағалау есебі h_0 ,..., h_{Ns-1} параметрлердің ақырлы жиынның (дискретті импульстік өтпелі функция деп аталады) бағалаумен алмастырылады (параметрленеді).

Бейнелеуді жеңілдеті үшін (13.30) теңдеулерін матрицалық түрде жазайық:

$$\begin{bmatrix} z_o \\ \vdots \\ z_{N_m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,0}\dots x_{0,N_S-1} \\ \dots \\ x_{N_m-1,0}\dots x_{N_m-1,N_S-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_o\Delta \\ \vdots \\ h_{N_S-1}\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_o \\ \vdots \\ n_{N_m-1} \end{bmatrix} \quad (13.31)$$

Матрицалық бейнелеуді символикалық түрде жазамыз:

$$z = A\beta + n \quad (13.32)$$

Есеп берілген А матрица мен z өлшеуелер векторында β параметрлер векторын анықтауға келтіріледі.

β параметрлер векторын бағалауда критерий болып өлшеуелер аралығында алшақтықтылардың квадраттарының қосындысын минимизациялайтындай β-ды іріктеп алу табылады.

$J = \sum_{i=1}^{N_m-1} n_i^2$ матрицалық түрде $J = n^T n$ болсын дейік (13.33)

(13.32)-ні (13.33)-ке қойып $J=(z-A\beta)^T (z-A\beta)$ аламыз.

Келесі шартты қанағаттандыратындай β^* анықтау керек:

$$J^* = \min_{\beta} J = J/_{\beta=\beta^*}.$$

J –ды есептеудің қажетті шарты болып келесі экстремум шартының орындалуы табылады:

$$\frac{\partial y}{\partial \beta}\Big|_{\beta=\beta^*} = 0.$$

(13.21) теңдеулерді қосындылар түрінде жазайық:

$$J = \sum_{i=0}^{N_m-1}\left(z_i - \sum_{j=0}^{N_S-1} a_{ij}\beta_j\right)\left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k\right) \quad (13.34)$$

(13.24) J-ді β векторының компоненттері бойынша дифференциалдайық:

m = 0,1,..., N_S –1 болғанда:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_m}/_{\beta_m=\beta_m^*} = \sum_{i=0}^{N_m-1}\left[-a_{im}\left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k^*\right) + \left(z_i - \sum_{j=0}^{N_S-1} a_{ij}\beta_j\right)(-a_i)\right] = -2\cdot\sum_{i=0}^{N_m-1} a_{im}\left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k^*\right) \quad (13.35)$$

(13.35) формуланы матрицалық түрде бейнелейік:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta}/_{\beta=\beta^*} = -2A^T(z - A\beta^*) = 0 \quad (13.36)$$

бұл теңдеу J экстремумның қажетті шарты болып табылады.

min J –ді есептеуде қажетті шарт болып $\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial J}{\partial \beta}\right)^T /_{\beta=\beta^*}$ квадрат матрицаның оңтаңбалы анықтығы табылады.

Егер (13.36) формуланы және бір рет β бойынша дифференциалдасақ, онда келесіні аламыз:

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial J}{\partial \beta}\right)^T /_{\beta=\beta^*} = 2A^T A \quad (13.37)$$

Егер A^TA матрица – ерекше емес болса, және (13.37)-де оң жағы β -ға тәуелсіз болса, онда (13.36) экстремум шарты минимумның қажетті және жеткілікті шарты болып табылады.

(13.36) –ны келесі түрде қайта жазайық:

$$A^T A\, \beta^* = A^T z, \quad \text{осыдан} \quad \beta^* = (A^T A)^{-1} A^T z$$
(13.38)

Келесіні еске түсірейік: $A = \begin{bmatrix} x \ldots x \\ x \ldots x \end{bmatrix}$, $\beta*^T = \left[h_0^*\Delta, \ldots, h_{N_i-1}^*\Delta\right]$, $z*^T = \left[z_0 \ldots z_{N_m-1}\right]$.

Үздіксіз түрде (13.38) теңдеу келесі түрге ие болады:

$$\int_0^{T_S}\left[\int_0^{T_m} x(t-\tau)x(t-\theta)dt\right]h*(\theta)d\theta = \int_0^{T_m} x(t-\tau)z(t)dt \qquad (13.39)$$

(13.39) – **Винер-Хопф (ВХТ) теңдеуі** келесі түрде қайта жазылуы мүмкін:

$$\int_0^{T_S} R_{xx}(r-\theta)h*(\theta)d\theta = R_{xz}(r)$$

мұнда: $R_{xx}(\tau)$ - автокорреляциялық функция; $\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} x(t-\tau)x(t)dt$ және $R_{xz}(\tau)$ - өзара корреляциялық функция.

Кездейсоқ X(t) үрдістің автокорреляциялық функциясы деп ол t,t‘ мәндердің әр жұбында X(t) функцияның кездейсоқ қимасына сәйкес корреляциялық моментке тең болатын екі K_{xx}(t,t‘) аргументтердің кездейсоқ емес функциясы аталады:

$$K_{xx}(t,t') = M\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t')\right].$$

Күйді Калман фильтрімен бағалау.

Өлшеу қателігін, күйлер векторын модельдеу қателігін және жүйеге кездейсоқ факторлардың тигізетін әсерін ескеру үшін күйлер векторын бағалау үшін Калманның дискретті фильтрін пайдаланайық.

Күйлер векторы бағаларының ағымды $\hat{x}(k)$ мәндері итерациялық ереже бойынша анықталады:

$$\begin{gathered}
\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k)\cdot\left[y(k+1) - H\cdot\hat{x}(k+1|k)\right], \\
\hat{x}(k+1|k) = A(k)\cdot\hat{x}(k) + B(k)\cdot u(k) + F(k)\cdot\bar{q}(k), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \\
K(k) = P_x(k+1|k)\cdot H^T\cdot\left[H\cdot P_x(k+1|k)\cdot H^T + R\right]^{-1}, \\
P_x(k+1|k) = A(k)\cdot P_x(k|k)\cdot A(k)^T + F(k)\cdot Q(k)\cdot F(k)^T, \\
P_x(k+1|k+1) = \left[I - K(k)\cdot H\right]\cdot P_x(k+1|k), \\
P_x(0|0) = P_{x_0},
\end{gathered} \qquad (13.41)$$

мұнда: y(.) – өлшеу арнасы ( ), H – өлшеу арна матрицасы, I – сәйкесінші өлшемді бірлік матрица, $P_{x_0} = M\left\{(x_0-\bar{x}_0)\,(x_0-\bar{x}_0)^T\right\}$ - күйлердің бастапқы векторының ковариациялар матрицасы.

Күйлер векторының компоненттерінің барлығын өлшеу мүмкін емес. Олардың кейбіреулері қателікпен өлшенеді, сондықтан күйлер векторының мәндерін Калман фильтрімен бағалайық. Ол үшін өлшеу арнасын пайдаланамыз.

H- келесі түрдегі матрица болады:

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, егер күйлер векторының 2-ші компоненті - өлшенбейтін шама болса;

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, егер күйлер векторының 1-ші компоненті - өлшенбейтін шама болса;

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, егер күйлер векторының 1-ші және 2-ші компоненттері – өлшенбейтін болса.

Күйлер векторын Калман фильтрімен бағалау нәтижесінде баға модельдеу нәтижесінде алынған күйлер векторының мәндерімен айтарлықтай толық сәйкес келеді.

Бақылау сұрақтары

1 Объектілердің параметрлері мен жай-күйін бағалау;
2 Винер бағалау;
3 Винер-Хопф Теңдеуі;
4 Калман-Буси Сүзгісі;
5 Квазилинеаризация әдістері;
6 Сызықтық динамикалық жүйелерді анықтау. Жинақтау теңдеуінен салмақ функциясын анықтау;
7 Ең аз квадраттар әдісі бойынша салмақ функциясын бағалау;
8 Қалман сүзгісімен жағдайды бағалау.

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

14 лекция Бапталатын адаптивті модельдермен идентификациялау әдістері

Мақстаы: лекцияда келесі мәселелерді қарастырамыз: Бапталатын адаптивті модельдермен идентификациялау әдістері; динамикалық объектілердің адаптивті модель түрлері; параметрлер, сигналдар бойынша сызықты модельдер; адаптивті модельдерді қолданғандағы идентификациялаудың құрылымдық сұлбалары; кіріс сигналдың сипаттамалары мен баптау процесінің байланысы, параметрлерді баптаудың тәуелсіздік шарттары; модельді объектіге жақындату критерийлерінің түрлері; гипертұрақтылық критерийлері мен Ляпуновтың екінші әдісін қолдану арқылы модельдер мен аналогтарды баптау алгоритмдерін градиенттік әдістермен синтездеу; адаптивті модельдерді баптаудың синтезделген алгоритмдерін ықшамдау.

Тезистер

Адаптивті басқару — басқару объектінің параметрлерінің немесе басқару объектісіне әсер тигізуші сыртқы ұйтқулардың өзгеруіне тәуелді реттегіштің параметрлерін немесе реттегіштің құрылымын өзгерту мүмкінді бар басқару жүйелерін синтездеуге мүмкіндік беретін басқару теория әдістерінің жиынтығы. Мұндай басқару жүйелері адаптивті деп аталады. Адаптивті басқару басқару теориясының көптеген қосымшаларында кең пайдаланылады.

Адаптивті жүйелерді классификациялау. Басқарушы құрылғыда орын алатын өзгерулердің сипаты бойынша адаптивті жүйелерді екі үлкен топқа жіктейді:

- өзіндік бапталатын (реттегіш параметрлердің мәндері ғана өзгереді);
- өзіндік ұйымдастырушы (реттегіштің құрылымы өзгертіледі).

Объектті зерттеу тәсілі бойынша жүйелер жіктеледі:

- іздестіруші;
- іздестірусіз.

Бірінші топта әсіресе экстремальды жүйелер танымал, олардың басқару мақсаты жүйені объекттің статикалық сипаттарының экстремум нүктесінде ұстап тұру болып табылады. Мұндай жүйелерде экстремумге қарай қозғалуды қамтамасыз ететін басқарушы әсерлерді анықтау үшін басқарушы сигналға іздестіруші сигналды қосады. Іздестірусіз адаптивті басқару жүйелері реттегіштің параметрлерін дәлірек баптау үшін ақпаратту алу тәсілі бойынша келесілерге жіктеледі:

- эталондық моделі бар жүйелер (ЭМ);
- идентификаторы бар жүйелер, әдебиетте әдетте оларды бапталатын моделі бар жүйелер деп атайды (БМ).

ЭМ бар адаптивті жүйелер қажетті сапаға ие болатын жүйенің динамикалық моделін қамтиды.

содержат динамическую модель системы, обладающую требуемым качеством. Идентификаторы бар адаптивті жүйелер басқару тәсілі бойынша келесілерге жіктеледі:

- тікелей;
- жанама (тікелей емес).

Жанамлық адаптивті басқаруда алдымен объект параметрлері бағаланады, одан кейін алынған бағалардың негізінде реттегіш параметрлерінің қажетті мәндері анықталады да оларды дәлірек баптау жасалады. Тікелей адаптивті басқаруда объект пен реттегіш параметрлерінің өзара байланысын ескеру арқасында реттегіш параметрлерін тікелей бағалау және дәлірек баптау орындалады, сондықтан объекттің параметрлерін идентификаттау кезеңі жойылады. Өзіндік баптау эффектіне қол жеткізу тәсілі бойынша моделі бар жүйелер келесілерге жіктеледі:

- **сигнальдық** (пассивті) адаптациясы бар жүйелер;
- **параметрлік** (белсенді) адаптациясы бар жүйелер.

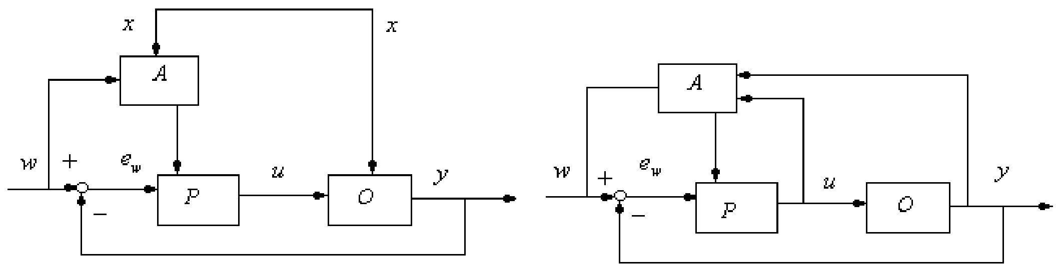
Сигнальдық адаптациясы бар жүйелерде өзіндік баптау эффектіге басқарушы құрылғының параметрлерін өзгертпестен компенсациялаушы сигналдар көмегімен қол жеткізіледі. Өзінде адаптацияудың екі түрін де үйлестіретін жүйелер комбинирленген жүйелер деп аталады. Олар бейсызықты жүйені немесе параметрлері ауыспалы жүйені басқару үшін пайдаланылады. Мұндай жүйелер қатарына, мысалы, асинхронды машиналарды, магниттік жастықтағы транспорт құралдары, магниттік подшипниктер және с.с. жатқызады. Механикалық жүйелер арасынан инверстік маятник, көтергіш транспорттық машиналар, роботтар, қадамдап жүруші машиналар, су астында жұмыс жасаушы аппараттар, ұшақтар, ракеталар және басқарылатын жоғары дәлдікті қару түрлерін және с.с. атауға болады.

Сонымен, басқару жүйелердің тиімділігін жоғарылату мақсатында адаптивті басқару жүйелері идеясы жетілдіріледі. Адаптивті басқару жүйелерінің параметрлері фиксацияланған жүйелерден негізгі айырмашылығы – олар объекттердің өзгеретін сипаттамаларына және олардың ішінде өтетін үрдістерге бейімделіне алады (дәлірек баптала алады) (сурет 14.1). Реттегіштерді баптаудың негізгі екі тәсілі бар:

- тікелей байланыспен баптау (ажыратылған цикл бойынша адаптация);
- кері байланыспен баптау (тұйықталған цикл бойынша адаптация).

Егер сыртқы кіріс факторларға (тікелей өлщеуге қолжетерлік) тәуелді реттегіш қалай бапталуы тиіс екендігі белгілі болса, онда баптаудың тікелей әдісін пайдалануға болады.

Объекттің динамикалық қасиеттерін тікелей бағалау мүмкін болмаған жағдайларда кері байланысы бар баптауды нмемесе тұйықталған контур бойынша адаптациялауды пайдалануға мәжбүр боламыз. Бұл кезде объект туралы ақпараттың қажетті минимумын кіріс және шығыс сигналдарды өлшеулерді өңдеу арқылы алады. Адаптацияны пайдалану құрылымды көз қарастан екінші кері байланысты және сәйкесінше екінші тұйықталған контурды енгізумен тең күшті.



А – баптау алгоритмі, Р – реттегіш, О – басқару объекті, w – берілген айнымалының векторы,

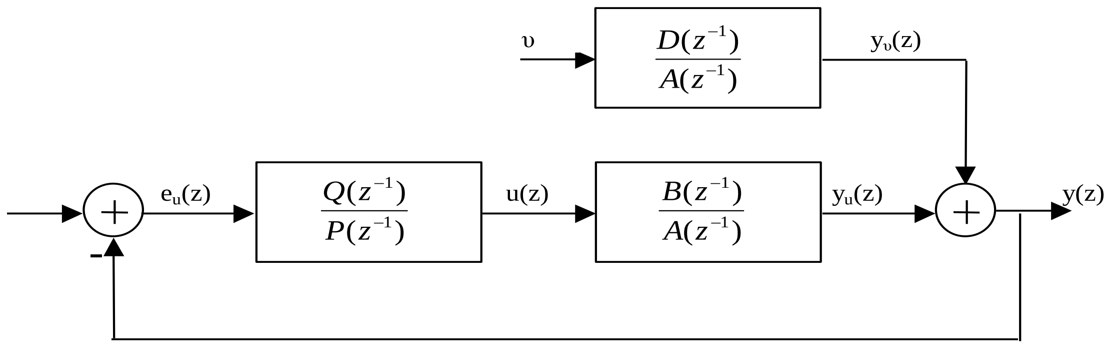
e_w – басқару қателігі $e_w = w - y$.

Сурет 14.1 – Адаптациядағы құрылымдық идентификаттау

Барлық адаптивті реттегіштерді екі класқа жіктеуге болады: өзіндік оптимизацияланатын реттегіштер және эталондық моделі бар реттегіштер.

Реттегіштері бар немесе эталондық моделі бар реттегіштері бар басқару жүйелерде адаптациялау үрдісі үш кезеңде өтеді: объектті (эталондық модельді) немесе басқару жүйені тұтасымен идентификаттау; реттегішті есептеу; реттегішті баптау.

Тұйықталған контурда идентификаттау. Тұйықталған контурда дискретті модельдерді шұғыл идентификаттау ерекшеліктерін (14.2 суретте қараңыз).



Сурет 14.2 - Тұйықталған контурда идентификаттау

Есептің мұндай қойылымында модельді идентификаттау тәсілдерінің бірнеше нұсқалары болуы мүмкін.

1. Басқару объектісінің жанама идентификатау. Тұтас тұйықталған контур параметрлерін бағалайды, егер реттегіштің параметрлері белгілі болса, объекттің сипаттамаларын аналитикалық түрлендірулер арқылы анықтайды.
2. Тұйықталған объектті идентификаттау аралығын тастап кетіп, объект моделінің параметрлерін тікелей анықтайды.
3. Жүйенің тек шығыс параметрлері ғана өдшеуге қол жетерлік.
4. y және u өлшейді.
5. Объектке сыртқы ұйытқу әсері жоқ, онда yu=y
6. Объектке сыртқы ұйытқулар әсер тигізеді, бырақ идентификаттау барысында оларды ескермейді.
7. Сыртқы ұйытқудың әсері соншалықты елеулі, ол модель параметрлерін идентификаттау барысында ескеріледі.

Есепті қарастырғанда басқару объектті үлкенде, ал реттегіш сызықты, стационарлы және бөгеуілдер әсеріне ұшырамайды деп жорамалдаймыз.

Объекттің беріліс функциялары:

1. $$Gp(z) = \frac{b_1 z^{-1} + ... + b_{mb} z^{-mb}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_{ma} Z^{-ma}} \cdot Z^{-d}$$

2. $$Gpv(z) = \frac{1 + d_1 z^{-1} + ... + d_{md} z^{-md}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_{ma} Z^{-ma}}$$

3. $$Gr(z) = \frac{g_0 + g_0 z^{-1} + ... + g_0 z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + ... + p_M Z^{-M}}$$

Егер кіріс ретінде u(z), ал шығыс ретінде y(z) қабылдасақ, онда беріліс функцияларды анықтаймыз:

$$W(z) = \frac{y(z)}{V(Z)} = \frac{Gpv}{1 + Gr + Gp} = \frac{D(z^{-1})P(z^{-1})}{A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})Q(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})} = \frac{(r)}{(l)}$$

l=max[ma+μ, mb+υ+d]

θTα,β=[α1... αl β1...βr]

θa,b=F/ θα,β /

Есепті бірмәнділік шешу үшін белгілі бір шарттардың орындалуы тиіс, олар тұйықталған контурда объектті идентификаттау шарттары деп аталады.

Тұйықталған басқару контурдың құрамына кіретін объект параметрлі идентификацияланатын объект деп аталады, егер идентификаттаудың кейбір әдісі арқылы оның параметрлерінің өзіндік бағаларын алу мүмкін болса:

$$\lim_{N\to\infty} E\{\theta(N)\} = \theta$$

Осы шарты орындалатын объект үшін тұйықталған контурда объекттің идентификациялану шарты деп аталатын 2 шартты тұжырымдауға болады. Идентификацияланатын объекттің m_a және m_b модельдерінің реті және m_b модель алымының реті алдын-ала белгілі болуы тиіс.

Егер Ai және Bi модельдер параметрлерінің саны (ma+mb) болатын бағалары теңдеуден αі -дің *l*–параметрлері бойынша анықталатын болса және D(z-1) пен A(z-1) полиномдардың ортақ түбірлері болмаса, онда бірмәнділік шешімді алу үшін келесі теңсіздік орындалуы керек:

$$l \ge m_a + m_b$$

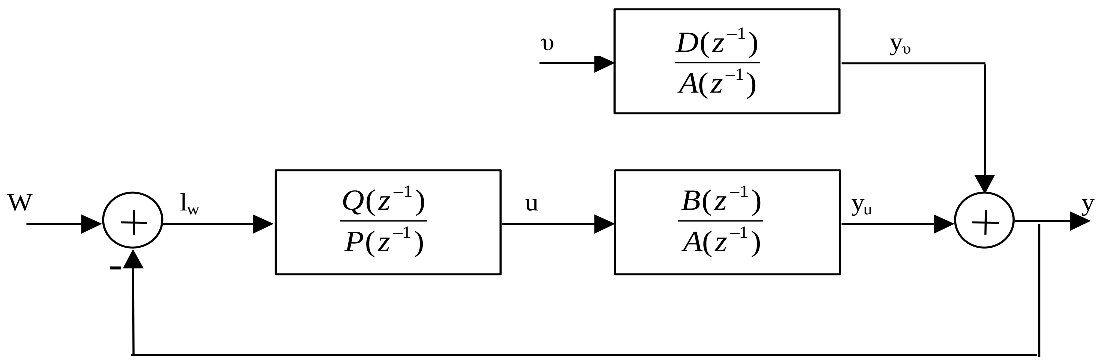
Онда, $\max|m_a+\mu, m_b+\upsilon+d| \ge m_a+m_b$ немесе $\max|\mu-m_b, \upsilon+d-m_a| \ge \tau$

$\upsilon > \mu - d - m_a - m_b$

$\upsilon \ge m_a - d$; $\mu \ge m_b$; $\upsilon > m_a$; $\mu \ge m_b$.

Егер объект осы шарттарды қанағаттандыратын болса, онда объект параметрлерін жанама идентификаттау есебі бірмәнділі шешілуі мүмкін.

Тұйықталған контурда объекттің параметрлерін тікелей идентификаттау (14.3 суретті қараңыз).



Сурет 14.3 – Тұйықталған контурда объекттің параметрлерін тікелей идентификаттау

W=0; lw=-y

$$\frac{U(z)}{V(z)} = \frac{-Gr \cdot Gpv}{1+Gr \cdot Gp}$$

$$\frac{y(z)}{V(z)} = \frac{Gpv}{1+Gr \cdot Gp}$$

$$\frac{y(z)}{U(z)} = \frac{y(z)V(z)}{U(z)V(z)} = -\frac{1}{Gr}$$

Алынған мәндерді айырымдық теңдеулер түрінде бейнелейік:

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1}) \cdot z^{-d} U(z) - D(z^{-1}) \cdot V(z)$$

$$[A(z^{-1}) \cdot P(z^{-1}) + B(z^{-1}) \cdot z^{-d} Q(z^{-1})]y(z) = D(z^{-1}) \cdot U(z)$$

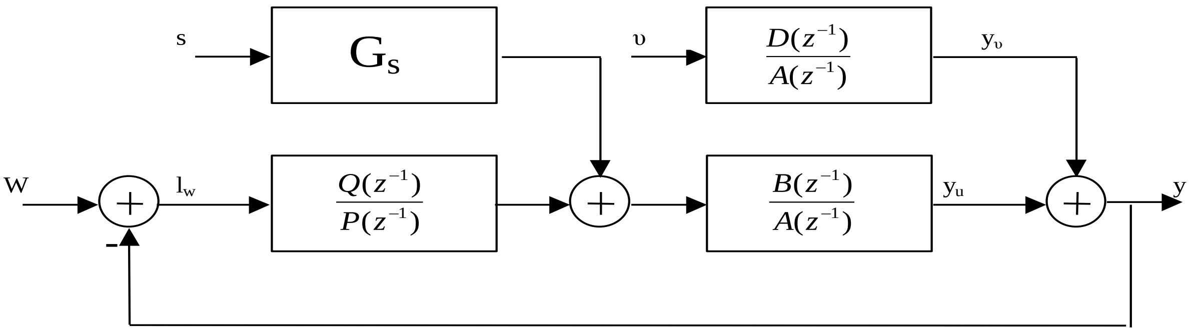
$$Q(z^{-1})y(z) = -P(z^{-1})U(z)$$

$$A(z^{-1})P(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}P(z^{-1})U(z) = D(z^{-1})P(z^{-1})V(z)$$

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}U(z) = D(z^{-1})V(z)$$

Бұл тәсілдің айырмашылығы – U(z) тұйықталған контурдағы объект кірісі туынды функция емес және y(z) функция болып табылады.

Реттегіштің шығысында сыртқы ұйытқулар орын алғандағы тұйықталған контурда идентификаттау (14.4 суретте қараңыз)



Сурет 14.4 – Сыртқы ұйытқулар орын алғандағы тұйықталған контурда идентификаттау

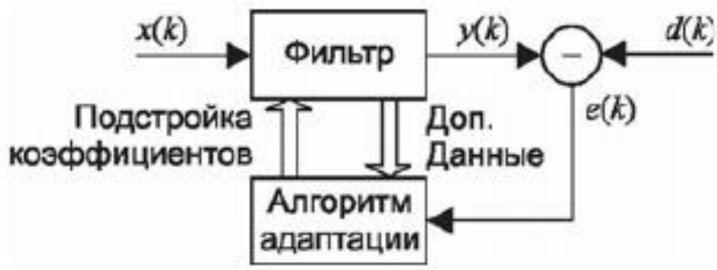
Есеп айырымдық теңдеу негізінде идентификаттауға келтіріледі, сонымен қатар, олардың формасы бөгеулге дейінгі формадағыдай болады.

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}U(z) = D(z^{-1})V(z)$$

$$U(z) = Ur(z) + Us(z)$$

Полиномның кез келген мәндерінде ν және μ деректер векторының сызықты комбинациясы болып табылмайды, яғни, объектті ν мен μ ретіне тәуелсіз әрдайым идентификаттау мүмкін.

Идентификаттаудың бастапқы кезеңінде ең кіші квадраттар әдісін, ал белгілі бір тұрақтылыққа қол жеткізгенде бағаларды алудың дәлірек алгоритмдерін қолданатын схеманы тиімді пайдалануға болады.



Сурет 14.5 – Адаптивті фильтрдің жалпы құрылымы

Бақылау сұрақтары

1 Теңшелетін адаптивті модельдермен сәйкестендіру әдістері;

2 Динамикалық объектілердің адаптивті модельдерінің түрлері;

3 Сызықтық модельдер параметрлер бойынша, сигналдар бойынша;

4 Адаптивті модельдерді қолдана отырып, құрылымдық сәйкестендіру схемалары;

5 Орнату процесінің кіріс сипаттамасымен байланысы, параметрлер параметрлерінің Тәуелсіздік шарттары;

6 Модельдерді объектіге жақындату критерийлерінің түрлері;

7 Синтезделген бейімделу модельдерін баптау алгоритмдерін жеңілдету

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007

15 лекция Бейсызықты динамикалық сипаттамаларды идентификациялау әдістері

Мақстаы: лекцияда бейсызықты объектілерді идентификациялауға гармоникалық сызықтандыруды қолдану; бейсызықты объектілерді идентификациялауға статистикалық сызықтандыру әдісін қолдану; бейсызықты объектілерді функциональды дәрежелі қатарларды қолданып идентификациялау мәселелерін қоса бейсызықты динамикалық объектілерді идентификаттау әдістері қарастыру.

Тезистер

Бейсызықты жүйелерді идентификаттаудың бірнеше әдістері бар, олардың бір қатары:

1. тікелей іздеу әдісі;
2. бейсызықтылықты аппроксимациялау;
3. Гаммерштейн моделі;
4. Винер әдісі;
5. екі кезеңдік процедура;
6. объектілерді идентификаттауда гармоникалық сызықтандыруды қолдану;
7. бейсызықты объектілерді идентификаттау үшін статистикалық сызықтандыру әдісін пайдалану;
8. функциональды дәрежелік қатарларды пайдаланып бейсызықты объектілерді идентификаттау;
9. бейсызықты жүйелерді идентификаттаудың градиенттік әдістері және басқалары.

Тікелей іздеу әдістің мағынасы:

- бейсызықты f(x) функцияны сызықты y(x) функцияға түрлендіреді;
- одан әрі сызықты жүйелерді идентификаттаудың кез-келген әдісін пайдаланады.

Объекттің бейсызықты моделі келесі түрге ие болады дейік:

$$y = a_0 x_1^{B1} x_2^{B2},$$

мұнда: x_1, x_2 – кіріс параметрлер, y – шығыс параметр, a_0, $в_1$, $в_2$ - ізделінетін параметрлер. Логарифмдеуді орындап келесіні аламыз:

$$\ln y = \ln a_0 + \hat{a}_1 \ln x_1 + \hat{a}_2 \ln x_2;$$

$$Z = \ln y, \quad \varepsilon_1 = \ln x_1, \quad \varepsilon_2 = \ln x_2, \quad A = \ln a_0;$$

$$Z = A + \hat{a}_1 \varepsilon_1 + \hat{a}_2 \varepsilon_2$$

y-тің тек оңтаңбалы мәндерін ғана қарастырамыз..

Бейсызықтықты аппроксимациялау. Кестелік түрде берілген (анық бейсызықты) функция полином көмегімен еркін әдіспен аппроксимацияланады. Пайда болған полином біздің объекттің моделі болып табылады. Шектеулер: функция үздіксіз болуы тиіс. Барлық бейсызықтықтарды келесі полином арқылы сипаттауға болатындығын дәлелдейтін Вейерштрасс теоремасы бар:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \hat{a}_1 x_2 + \hat{a}_2 x_2^2$$

а) Сызықты айнымалымен алмастыру және регрессияға келтіру;

б) Интегральды формулаларды пайдалану.

Гаммерштейн моделі

Кіріс u(t) сигнал белгілі.

Егер f(u(t)) функциональды тәелділік - бейсызықтық түрі белгілі болса, онда Z=f(u(t)) енгіземіз. Идентификаттау $y(t) = A \cdot Z(t)$ сызықты бөлім параметрлерін анықтауға келтіріледі.

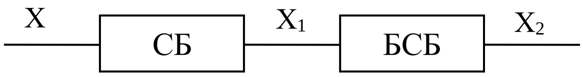
Егер f(u(t)) функциональды тәелділік белгісіз болса, онда осы бейсызық тәуелділіктің кестесі құрылады. Осы кесте бойынша кез-келген интерпретирлеуші формуламен бейсызықты аппроксимациялаушы f*(u(t)) полиномды аламыз. Аппроксимациялаушы полиномдың параметрлерін біле отырып, Z(t) = f(u(t)) енгіземіз және оған сәйкес y(t) түсіріп, идентификаттау есебін шешеміз:

y(t)= A Z(t).

xi — a0 ^+ ai xi, функция бейсызықты.

x2 = J (xi)

Мысал: Жүйе келесі түрге келтіріледі (15.1 суретті қараңыз):



Сурет 15.1 – Жүйені сызықты және бейсызықты бөлктерге жіктеу

Бейсызықты жүйенің сұлбасы. Интерполяциялау әдісін пайдаланып, полиномды аппроксимациялаймыз:

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + \hat{a}_{\mathrm{m}} x_1^m$$

Жалпылама векторды құрамыз:

$$V = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ x_1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^m \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{ll} \to a_0 & v_1 \\ & v_2 \\ & v_3 \\ & v_4 \\ & v_5 \\ & \vdots \\ & v_{m+3} \end{array}$$

Онда ізделетін матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & в_0 & в_1 & \ldots в_m \end{bmatrix}$$

өрнек бойынша алынуы мүмкін:

мұнда:

$$A = YV^T [VV^T]^{-1}, \quad Y = [x_2(1) \quad x_2(1) \ldots x_2(k)],$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1(1) & \cdots & v_1(k) \\ v_2(1) & \cdots & v_2(k) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m+3}(1) & \cdots & v_{m+3}(k) \end{bmatrix}$$

Инженерлік тәжірибеде кіріс және шығыс айнымалылардың арасындағы нақтылы тәуелділіктерді жуық сызықты тәуелділіктермен алмастыруға негізделген жуықтау әдістері кең қолданылады. Бұл кезде сызықтандыруды буындандардың бейсызықты қасиеттерін жуық шамамен болса да ескеріп орындау керек, яғни, сызықталған элементтер үшін суперпозиция принципі орындалмайтындай етіп.

Қатарға жіктеу арқылы бейсызықты сипаттамаларды сызықтандыру мағынасы y=f(x) сипаттаманы Тейлор қатарына жіктелуінің алғашқы екі мүшелерімен анықталатын жуық сызықты тәуелділікпен алмастыру. y=f(x) сипаттама дифференциалданатын және кіріс x(f) сигналдың кейбір орташа x0 мәннен айырмашылығы шағын болатын болсы, онда y=f(x) тәуелділікті келесі жуық тәуелділікпен алмастыруға болады:

y = f(x0) + f ' (x-0) (x - x0).

(15.1)

Бейсызықты y=f(x) тәуелділікті сызықты тәуелділікпен алмастыру геометриялық тұрғыда y=f(x) қисықты оған x0 нүктесінде өтетін жанама сызықпен алмастыру болып табылады.

Действующие внешние возмущения можно представить как стационарные случайные функции х (г) с математическим ожиданием тх и центрированной случайной составляющей л(г):

x(t)^mx + x(t).

(15.2)

В этом случае практически линеаризацию нелинейной характеристики целесообразно производить относительно центрированного входного случайного сигнала x(t), т.е. за центр разложения .x0 в (15.1) взять математическое ожидание тх входного сигнала x(1). В результате получается:

у (г) *./>У + ./' (тх) х (г).

(15.3)

Таким образом, приближенная зависимость (15.3) линейна только относительно случайной составляющей x(t) входного сигнала и нелинейно относительно математического ожидания тх, поэтому принцип суперпозиции здесь неприменим.

Гармоническая линеаризация. В целом ряде практических задач приходится рассматривать воздействие на линейное звено гармонических колебаний

X(t)= A sin ωt = A sin ψ, ψ=ωt.

(15.4)

Выходной сигнал нелинейного звена также будем периодическим, но не гармоническим.

Идея гармонической линеаризации состоит в том, что выходные периодические колебания y(t) разлагают в ряд Фурье и для дальнейших исследований ограничиваются рассмотрением лишь первых гармоник этого ряда. В этом случае нелинейная зависимость

y= y(t)=f(Asinψ),

заменяется приближенной

Y(t)=a0+asin ωt+bcosωt=a0+ q1x+q2x/ω,

где: $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)d\phi; \quad q_1 = \dfrac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)\sin\phi d\phi; \quad q_2 = \dfrac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)\cos\phi d\phi$

Статистическая линеаризация. Метод приближенной замены нелинейной характеристики эквивалентными в вероятностном смысле линейными зависимостями называется методом статистической линеаризации. В результате такой линеаризации нелинейная зависимость y=f(t) заменяется приближенной:

y(t)=kamx + k,x0(t).

где mx = const — математическое ожидание стационарного случайного сигнала на входе нелинейного элемента; x0(t) — центрированная случайная составляющая входного сигнала x (t).

Предполагается, что выходной стационарный случайный сигнал может быть представлен в виде:

y(t) = ту. + у/(t)

где my — математическое ожидание y(t); y/(t) -центрированная случайная составляющая y(t).

Коэффициент к0 = my/mx называется статистическим коэффициентом усиления нелинейного звена по математическому ожиданию.

Коэффициент k1=±σy/ σ x .

Идентификация нелинейных объектов с использованием функциональных степенных рядов Производная функции определяется разностным отношением:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Если существует предел и не зависит от того, как стремится к нулю, то функция является аналитической. Следовательно в окрестности некоторой точки a можно ее разложить в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{z-a}{n!} f^n(a) + \ldots$$

Если a=0 , то получаем ряд Маклорена:

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!} f^n(0) + \ldots$$

Учитывая , что последующие слагаемые выше второго достаточно малые величины, можно заменить функцию линейной частью разложения

Градиентные методы идентификации нелинейных систем. Для общей задачи минимизации функционала:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t [z(t) - y(t)]^2 dt$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad (15.5), (15.6)$$

при ограничениях:

$$\dot{x} = f[x(t), p(t), t],$$

где f – нелинейная вектор – функция.

Случай p_i - const $\dot{p} = 0$ будем задаваться начальным значением p^i , i- номер итерации, и решив систему дифференциальных уравнений оценим величину функции штрафа J^i. Слегка изменяя p^i , для нового значения $p_j^i + h_j$ найдем штраф:

$J^i + \eta_j$, j = 1,n, n - число неизвестных коэффициентов

j-ю компоненту вектора-градиента функции штрафа можно приближенно оценить как

$$\frac{dJ}{dp_j^i} \approx \frac{(J^i + \eta_j) - J^i}{(p_j^i + h_j) - p_j^i} = \frac{\eta_j}{h_j}$$

(15.7)

Повторяя эту процедуру для возмущений различных компонент вектора параметров, определим приближенное значение вектора-градиента dJ/dp^i Первое приращение вектора параметров в направлении наискорейшего спуска к минимуму функции штрафа составит

$$\Delta p^i = K^i \frac{dI}{dp^i},$$

(15.8)

и K^i – выбирается из условия

$$\min_{K^i} I(p^i - K^i \frac{dJ}{dp^i})$$

(15.9)

а новое приближение для вектора параметров определится как:

$$p^{i+1} = pi + \Delta p^i.$$

Простота приближенного метода позволила положить его в основу нескольких итерационных схем, однако трудно оценить ошибку, связанную с приближенным вычислением dJ/dp^i (процедура точного вычисления свелась бы к уже известным алгоритмам решения динамических задач). Приближенная процедура приводит к существенным ошибкам, особенно тогда, когда функция штрафа не очень чувствительна к изменению вектора параметров. Последнее, к сожалению, довольно часто имеет место, если измерения или наблюдения искажены помехой и имеются неизвестные входные сигналы.

Есептеу алгоритмі келесідей:

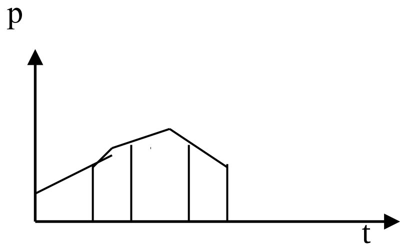
1. **p** параметрлер векторының бастапқы мәндерін береміз.
2. Дифференциальды (2) теңдеулерді шешеміз
3. Вычисляем значения функционала (1)
4.Вычисляем компоненты вектора-градиента функционала (1) по ф.(3).
5.Определяем новые значения p по ф.4 из условия (5)
6.Переходим к п.2 алгоритма, если компоненты вектора-градиента больше некоторой величины ε.

Егер жүйенің коэффициенттері уақыттың функциялары, яғни: p = p(t) болса, онда p(t) функцияны аппроксимациялау әдістерін пайдалануға болады.

1. Құрама-тұрақты функциялармен:

$$p^i = (p_i^1, p_i^2, ..., p_i^m)$$

2. 15.2 суретте көрсетілген түрдегі құрама-сызықты функциялармен.



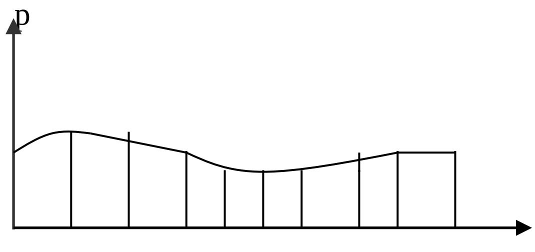
Сурет 15.2 – Бейсызықты функцияны құрама-сызықты аппроксимациялау

3. Полиномиальдық аппроксимация.

$$p_i = \sum_{k=0}^{m_i} p_{i,k} t^k, \quad m_i = t_f / h_p,$$

4.Сплайн-аппроксимация (15.3 суретті қараңыз).

$$p_i = \sum_{k=0}^{m_i} p_{i,k} t^k, \quad m_i = t_f / h_{sp}, \text{ мұнда } h_{2p} << h_p$$



Сурет 15.3 – Бейсызықты функцияның сплайн - аппроксимациясы

Бақылау сұрақтары

1 сызықтық емес динамикалық объектілерді анықтау әдістері;

2 сызықты емес объектілерді сәйкестендіру кезінде гармоникалық сызықты қолдану;

3 сызықтық емес объектілерді сәйкестендіру үшін статистикалық сызықтық әдісті қолдану;

4 функционалды қуат қатарларын қолдана отырып, сызықты емес объектілерді сәйкестендіру

5 адаптивті басқару. Адаптивті жүйелердің жіктелуі

Әдебиеттер

Негізгі әдебиет

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336с.

Қосымша әдебиет

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 2007